Semaine du 9 au 14 décembre

Espaces vectoriels normés

a) Normes , normes équivalentes, normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$, dans $M_n(\mathbb{K})$ et dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, norme euclidienne associée à un produit scalaire.
Les normes sont équivalentes en dimension finie (admis).
Distances et boules. Parties et applications bornées d'un espace vectoriel normé $(E, ||\ ||)$.
$B(I,E) = \{$fonctions bornées de I dans $E\}$ est un espace vectoriel et
$N_\infty : f \longmapsto sup\{||f(x)|| \ / \ x \in I\}$ définit une norme sur $B(I,E)$.
Applications lipschitziennes de (E,N) dans (E',N') : Elles forment un espace vectoriel.
La composée de deux applications lipschitziennes est une application lipschitzienne. .

b) Suites : Suites convergentes, suites de Cauchy, cas de la dimension finie, comparaison des suites.

c) Définition des ouverts, des fermés. Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.
Réunion et intersection de parties ouvertes ou fermées.
Définition des points adhérents, des points intérieurs.
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.
Définition des compacts en dimension finie : Ce sont les parties fermées bornées.

c) Fonction d'un espace vectoriel normé dans un autre : Ici les ev sont de **dimension finie**.
Continuité : image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, image directe d'un compact.
Continuité des applications linéaires , norme subordonnée.
Continuité des applications bilinéaires en dimension finie.

d) Calcul différentiel et intégral : $f : I \longrightarrow F$ où F est un espace vectoriel normé de dimension finie.
On étend, lorsque c'est possible, les propriétés des fonctions numériques
(dérivation, intégration, formules de Taylor, DL, etc ...)

Questions de cours :

- Dans un evn : $\forall (X,Y) \in E^2, \quad N(X-Y) \leqslant N(X) + N(Y) \quad$ et $\quad |N(X) - N(Y)| \leqslant N(X-Y)$
- Normes usuelles de $\mathbb{K}^n$: N_∞ et N_1 sont des normes. N_∞, N_1 et N_2 sont équivalentes.
- Normes de $C([a,b],\mathbb{K})$: $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|, \quad ||f||_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt, \quad ||f||_2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$
  $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ sont des normes. $||\ ||_\infty$, $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ ne sont pas équivalentes deux à deux dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
- $B(I,E) = \{$fonctions bornées de I dans $E\}$ est un espace vectoriel et $N_\infty : f \longmapsto sup\{||f(x)|| \ / \ x \in I\}$ définit une norme sur $B(I,E)$
- Espace vectoriel des applications lipschitziennes.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- $x \in \overline{A} \iff x$ est la limite d'une suite d'éléments de A
- Soit $f : E \longrightarrow F$. L'image réciproque d' un ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.
- soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et K un compact non vide de E. Alors, sur K, f est bornée et atteint ses bornes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\exists\, k \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall\, x \in E, \quad ||u(x)||_F \leqslant k||x||_E$ et u est continue sur E.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors on définit : $|||u||| = \sup\limits_{x\in E-\{0_E\}} \left(\dfrac{||u(x)||_F}{||x||_E}\right)$. $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.
- On a, pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ $\quad |||u||| = \sup\limits_{\substack{x\neq 0_E \\ ||x||_E \leqslant 1}} \left(\dfrac{||u(x)||_F}{||x||_E}\right) = \sup\limits_{||x||_E=1} \Big(||u(x)||_F\Big)$.
- Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors : $|||v \circ u||| \leqslant |||v|||\ |||u|||$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |||f^n||| \leqslant |||f|||^n$.
- Une application bilinéaire en dimension finie est continue.
- Dérivation de $B : t \longmapsto B(f(t), g(t))$ où $f : I \longrightarrow E_1$ et $g : I \longrightarrow E_2$ sont dérivables.

Semaine du 16 au 21 décembre

1) Espaces vectoriels normés (voir ci dessus)

2) Séries entières :

a) Rayon de convergence d'une série entière : Existence et unicité du rayon.
Définition du disque ouvert de convergence, lien entre les rayons : somme, produit de Cauchy, dérivation formelle, intégration formelle de séries entières.

b) Propriétés de la fonction somme S :
Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence.
Pour le cas de la variable réelle, S est dérivable sur $]-R, R[$, de classe C^∞ sur $]-R, R[$.
Expression des dérivées successives, calcul d'une primitive.

Questions de cours :

- Soit $f : E \longrightarrow F$. L'image réciproque d' un ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.
- soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et K un compact non vide de E. Alors, sur K, f est bornée et atteint ses bornes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\exists\, k \in \mathbb{R}_+ \;/\; \forall\, x \in E, \quad ||u(x)||_F \leqslant k||x||_E$ et u est continue sur E.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors on définit : $|||u||| = \sup\limits_{x \in E - \{0_E\}} \left(\dfrac{||u(x)||_F}{||x||_E} \right)$. $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.
- On a, pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ $\quad |||u||| = \sup\limits_{\substack{x \neq 0_E \\ ||x||_E \leqslant 1}} \left(\dfrac{||u(x)||_F}{||x||_E} \right) = \sup\limits_{||x||_E = 1} \Big(||u(x)||_F \Big)$.
- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors : $|||v \circ u||| \leqslant |||v|||\ |||u|||$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |||f^n||| \leqslant |||f|||^n$.
- Une application bilinéaire en dimension finie est continue.
- Dérivation de $B : t \longmapsto B(f(t), g(t))$ où $f : I \longrightarrow E_1$ et $g : I \longrightarrow E_2$ sont dérivables.
- Lemme d'Abel, existence et unicité du rayon.
- Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence.
- Si $(\exists\, r > 0 \;/\; \forall\, t \in]-r, r[, \quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n t^n)$ alors $(\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n)$

Prévisions : Intégrales impropres.

BONNES VACANCES ! ! !