REVISIONS ANALYSE FREQUENTIELLE

6) ANALYSE FREQUENTIELLE (HARMONIQUE)

- *réponse à une entrée sinusoïdale*
- *concerne l'étude du régime établi et plus particulièrement la stabilité*

Premier cours de 2ème année (le prochain…)

diagrammes de Bode (gains + phases)

Module du rapport de l'amplitude de sortie sur celle d'entrée.

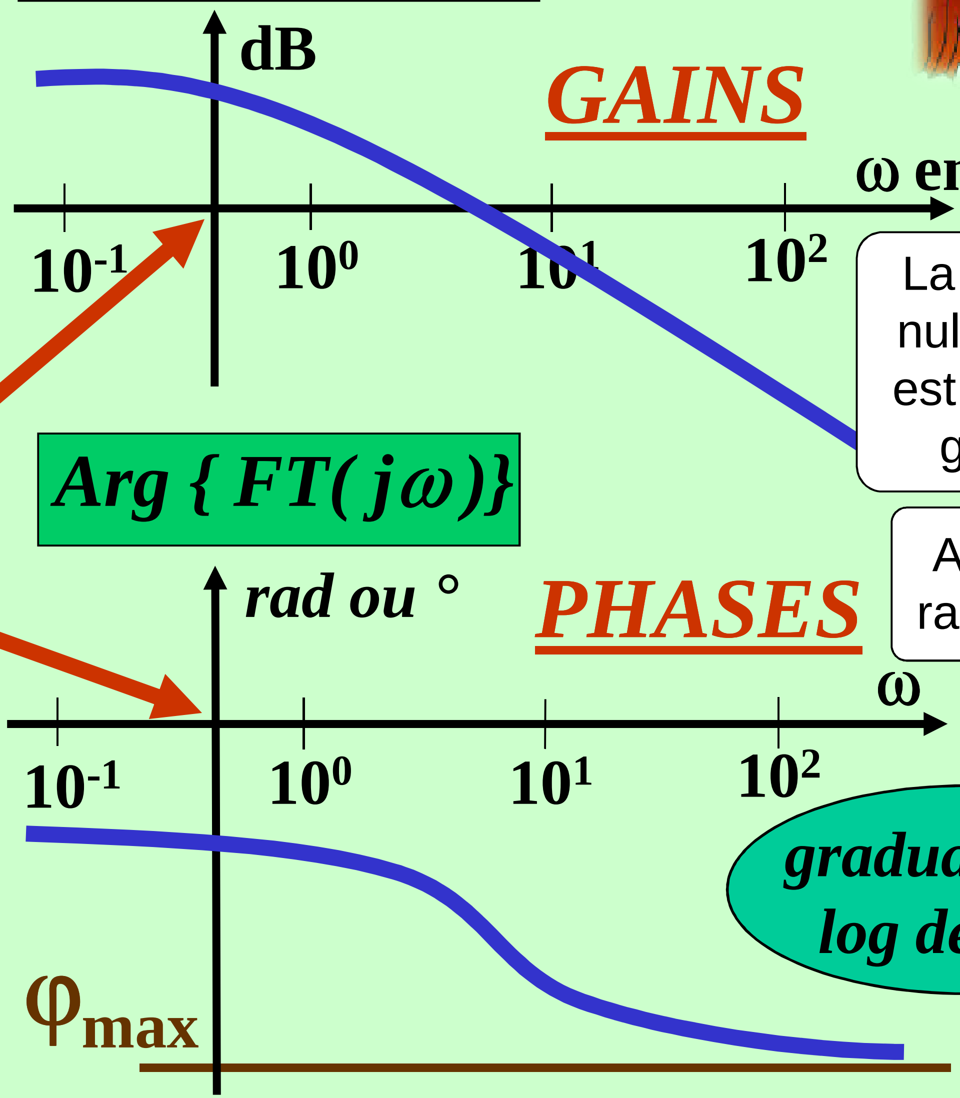
$$20 \log \left| \frac{As}{Ae} \right|$$

$$\omega \neq 0 \;!!!$$

retard signal de sortie

$$20 \log \left| FT\,(j\omega) \right|$$

$$Arg\,\{\,FT(j\omega)\}$$



La pulsation nulle (**ω = 0**) est à l'infini à gauche !

A bien se rappeler !!!

graduation en log décimal

Diagramme des gains

Même chose !

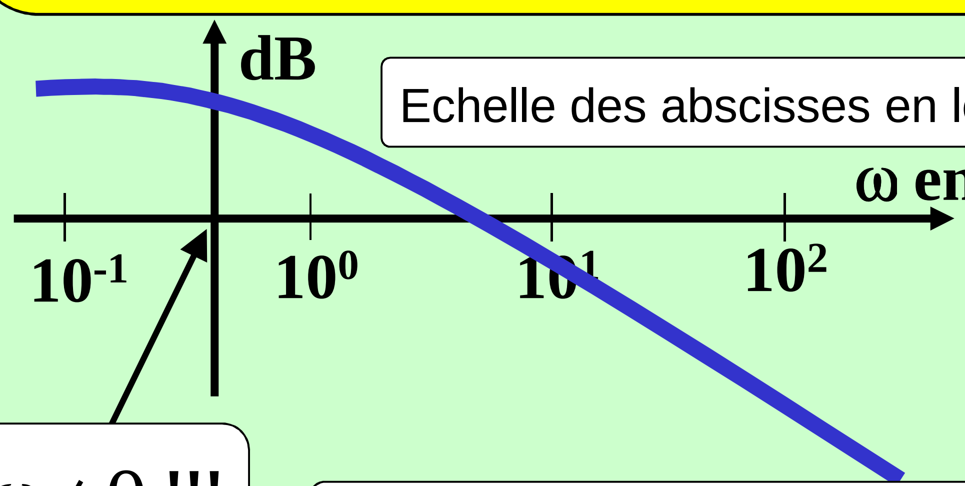
Module de la fonction de transfert harmonique (en remplaçant ***p*** par $j\omega$)

$$\overbrace{20 \log \left| FT(j\omega) \right|}$$

Amplitude du signal de sortie

$$20 \log \left| \frac{As}{Ae} \right|$$

Amplitude du signal d'entrée

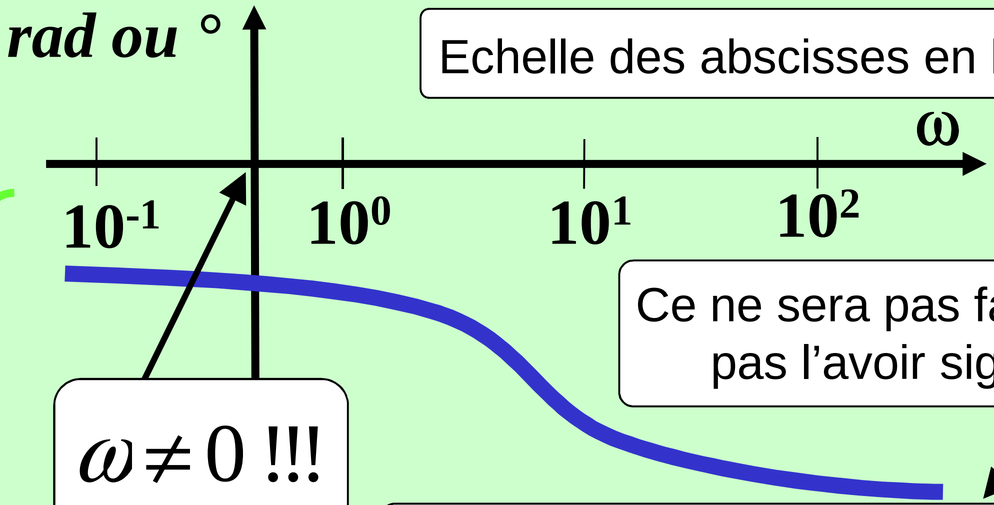


Echelle des abscisses en log décimal

$\omega \neq 0$!!!

La pulsation nulle (**ω = 0**) est à l'infini à gauche !

Diagramme des phases



Echelle des abscisses en log décimal

retard signal de sortie

$\omega \neq 0$!!! ☠

Ce ne sera pas faute de ne pas l'avoir signalé…

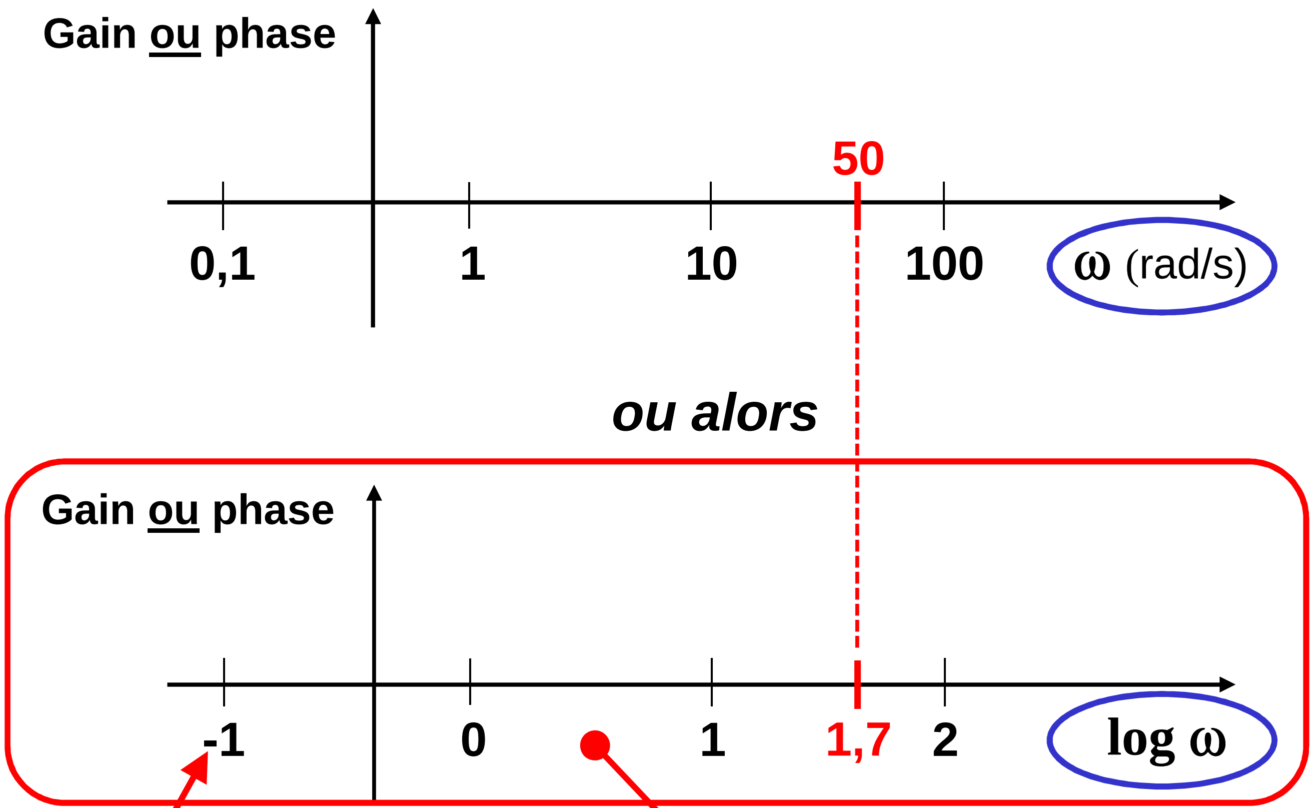
La pulsation nulle (ω **= 0**) est à l'infini à gauche !

Le retard exprimé en seconde, du signal de sortie par rapport à celui d'entrée (signaux de <u>même</u> période, fréquence, pulsation), est «*converti*» en radian ou degré.

Retard en seconde ⟶ période en seconde
Retard en deg (ou rad) ⟶ ***360°*** (ou ***2π***)

Même proportion: «*règle de 3*», «*produit en croix*», «*règle de proportionnalité*».

Deux façons de noter l'échelle des abscisses



Confusion possible avec une pulsation négative (ce qui n'a pas de sens…)

Notation «*moins facile*» pour positionner une valeur de pulsation : par exemple ***50*** (car il faut alors calculer ***log 50*** qui vaut ***1,7***)

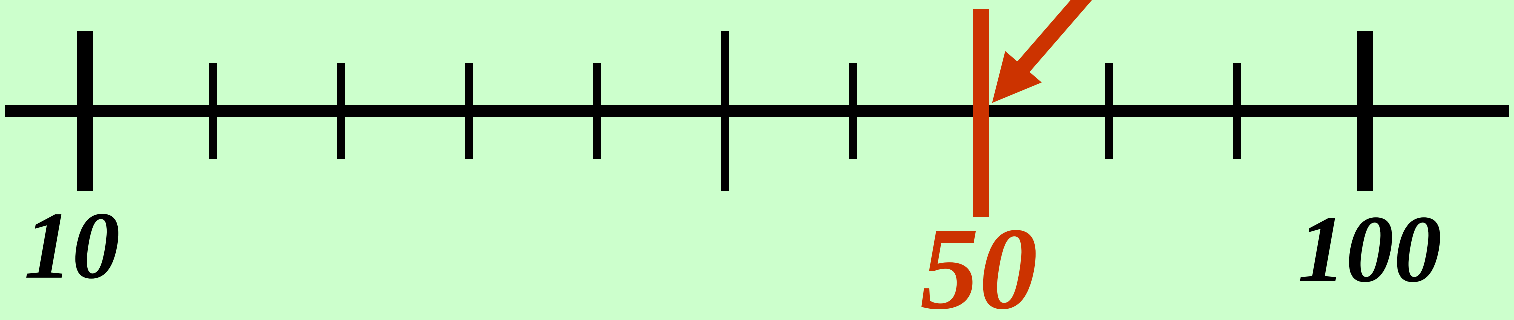
à savoir faire

Soit ***70%*** de l'échelle (ici entre ***10*** et ***100***)

☞ *graduer l'axe horizontal*

Placer 50 rad/s

log 5 = 0,7



☞ *calculer la pulsation ω_1 donnant une valeur donnée de gain ou de phase*

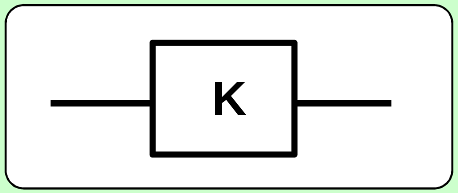
savoir résoudre :

$$\begin{cases} 20\log\left|FT(j\omega_1)\right| = A_{dB} \\ \text{ou} \\ Arg\left\{FT(j\omega_1)\right\} = \varphi \end{cases}$$

Voir en **TD**

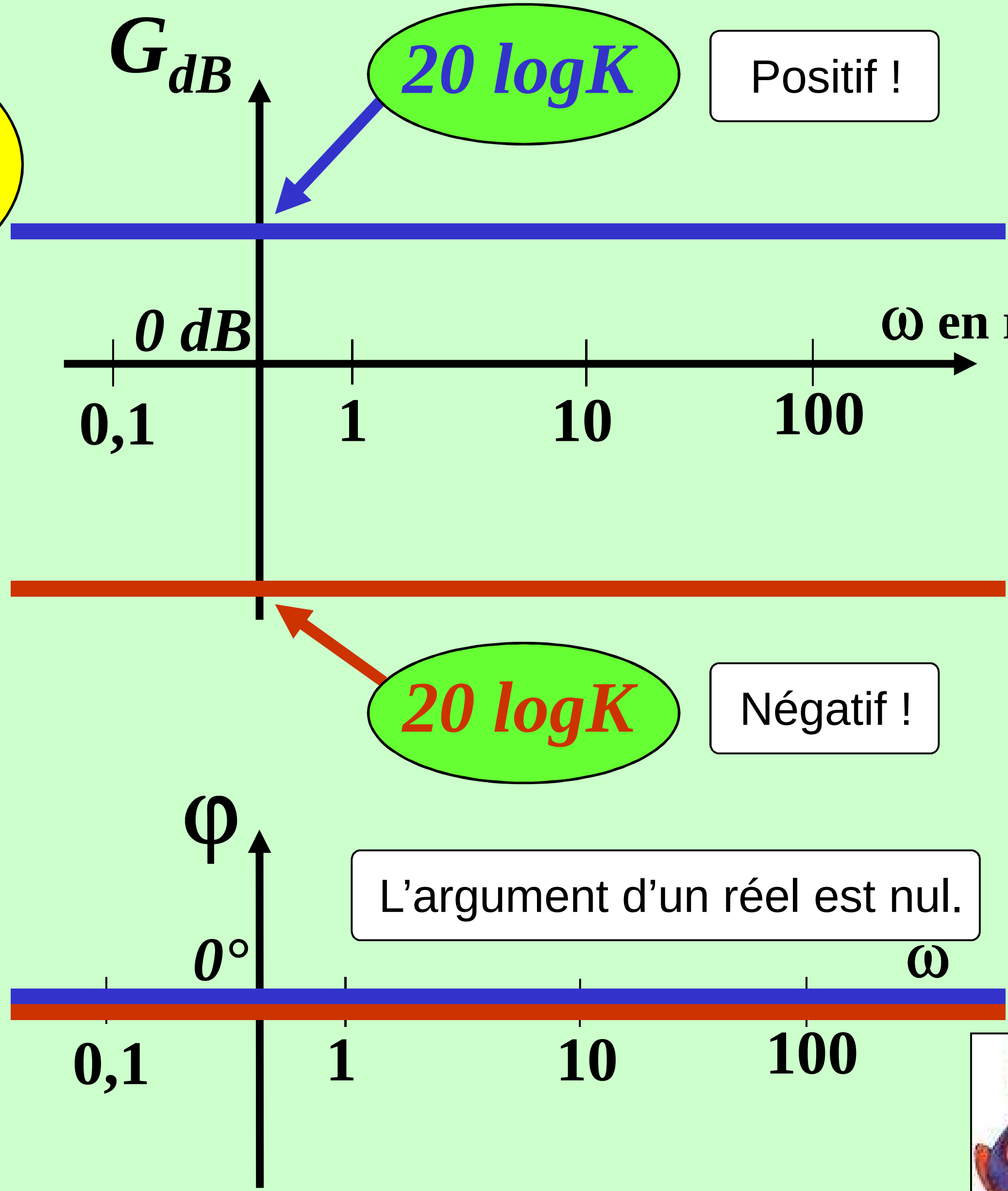
action proportionnelle

$FT(p) = K$



$K > 1$

$K < 1$



système — gain **K**

Le gain ***K*** est supposé positif

Un gain K en série fait :

***monter** la courbe des gains de 20 logK si K>1*

On a à faire le produit des gains or le ***log*** d'un produit égale la somme des ***log*** (avec ici ***20 log K >0*** car ***K >1***)

La courbe des gains du système est donc translatée vers le haut de la valeur constante ***20 log K***.

***descendre** la courbe des gains de 20 logK si K<1*

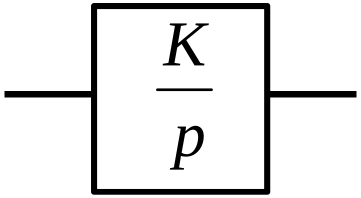
Idem mais avec ***20 log K <0*** car ***K <1***)

***ne modifie pas** la courbe des phases*

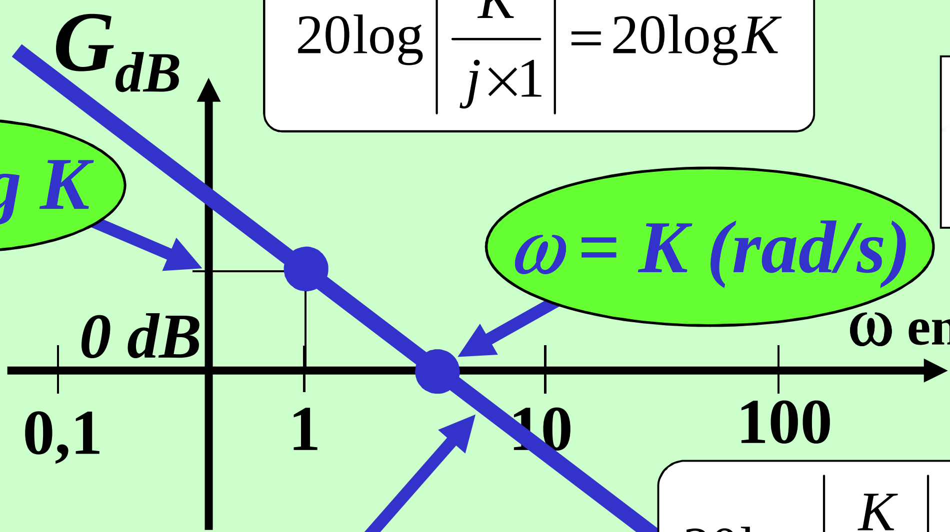
car ***Arg K = 0*** (quel que soit ***K***)

intégrateur

$$FT(p) = \frac{K}{p}$$

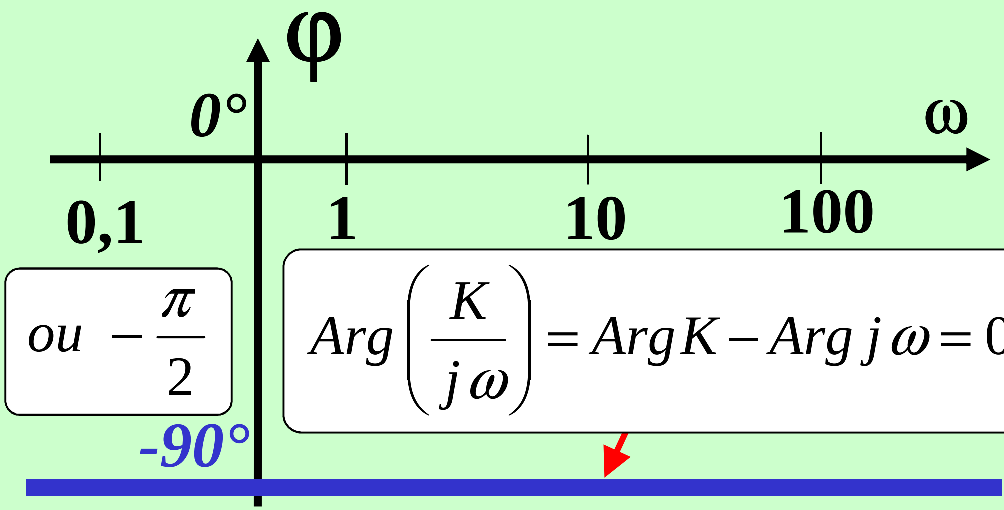


$$20\log\left|\frac{K}{j\times 1}\right| = 20\log K$$



$$20\log\left|\frac{K}{j\omega}\right| = 0\ dB$$

$$\Rightarrow \omega = K$$



$$ou\ -\frac{\pi}{2}$$

$$Arg\left(\frac{K}{j\omega}\right) = Arg\,K - Arg\,j\,\omega = 0 - 90°$$

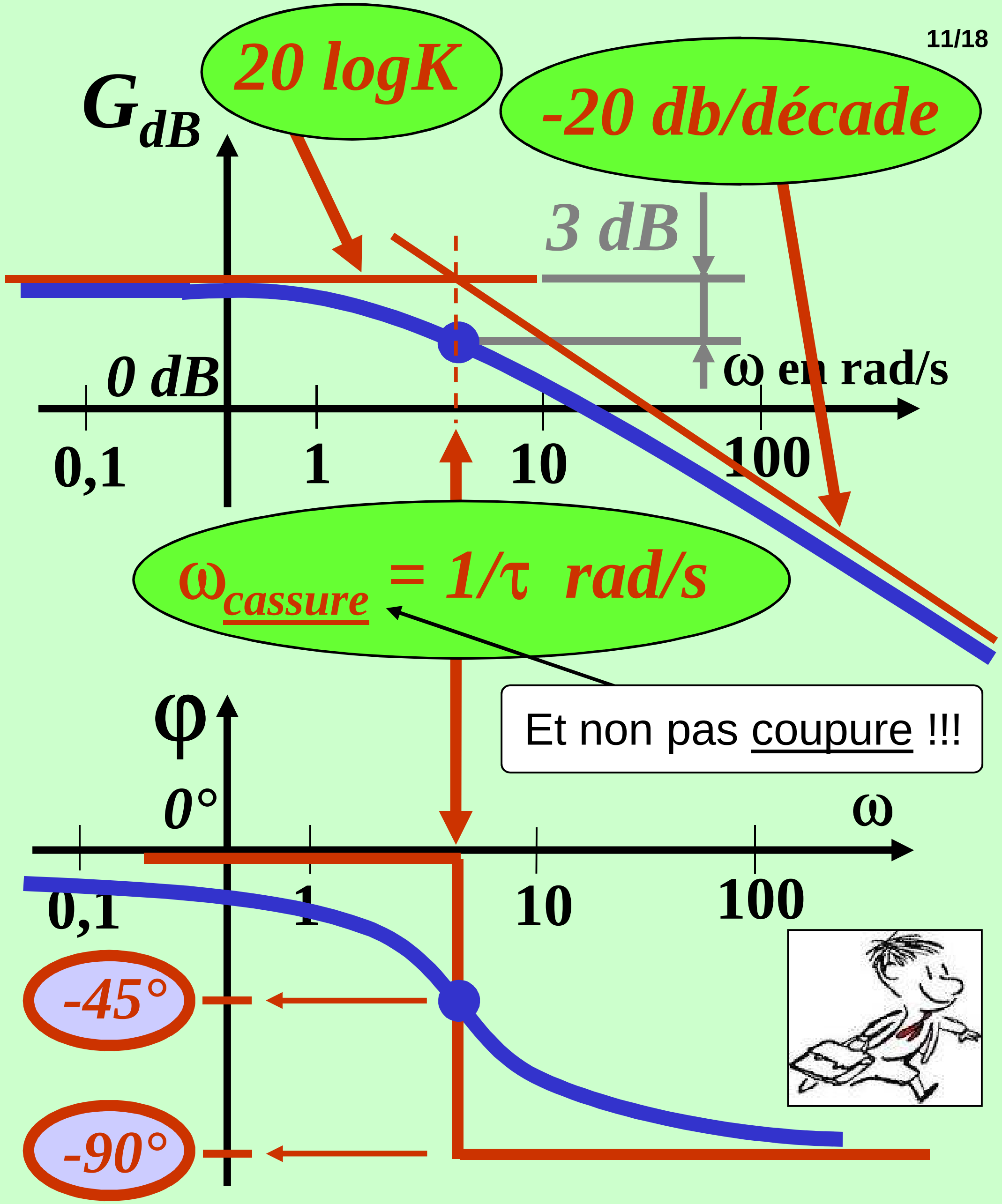
<u>Quatre</u> résultats à connaître :

- pente des gains
- valeur de ω pour un gain nul
- valeur gain pour **ω = 1 rad/s**
- valeur des phases

premier ordre

$$FT(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

$$\boxed{\frac{K}{1+\tau\, p}}$$



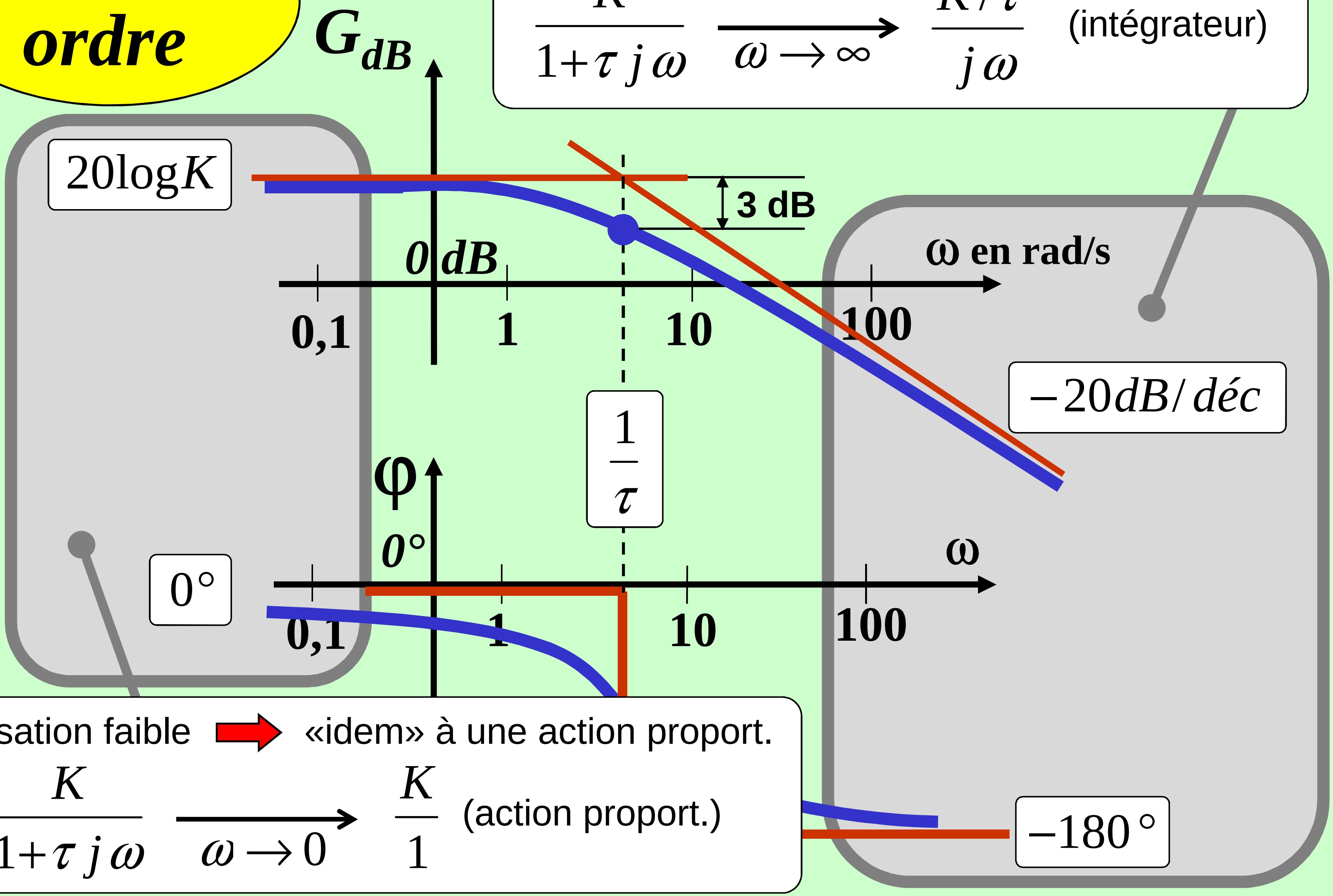
Quatre résultats à connaître :

- tracé asymptotique des gains
- tracé asymptotique des phases
- allure courbe des gains + 1 point
- allure courbe des phases + 1 point

premier ordre

Pulsation élevée ➡ «idem» à un intégrateur

$$\frac{K}{1+\tau j\omega} \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \frac{K/\tau}{j\omega} \quad \text{(intégrateur)}$$



Pulsation faible ➡ «idem» à une action proport.

$$\frac{K}{1+\tau j\omega} \xrightarrow[\omega \to 0]{} \frac{K}{1} \quad \text{(action proport.)}$$

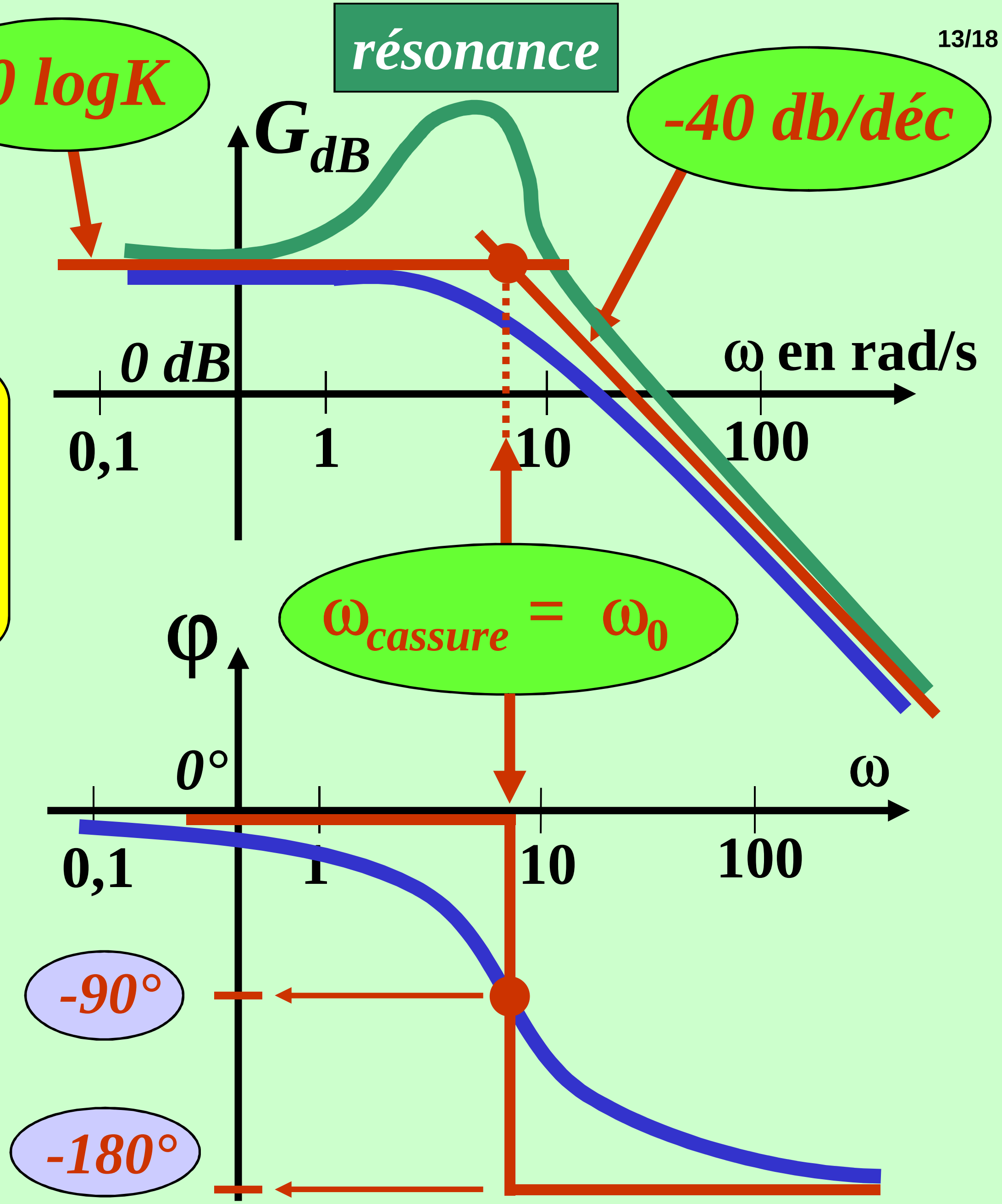
deuxième ordre

$$FT(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$

$$\boxed{\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

$$z > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

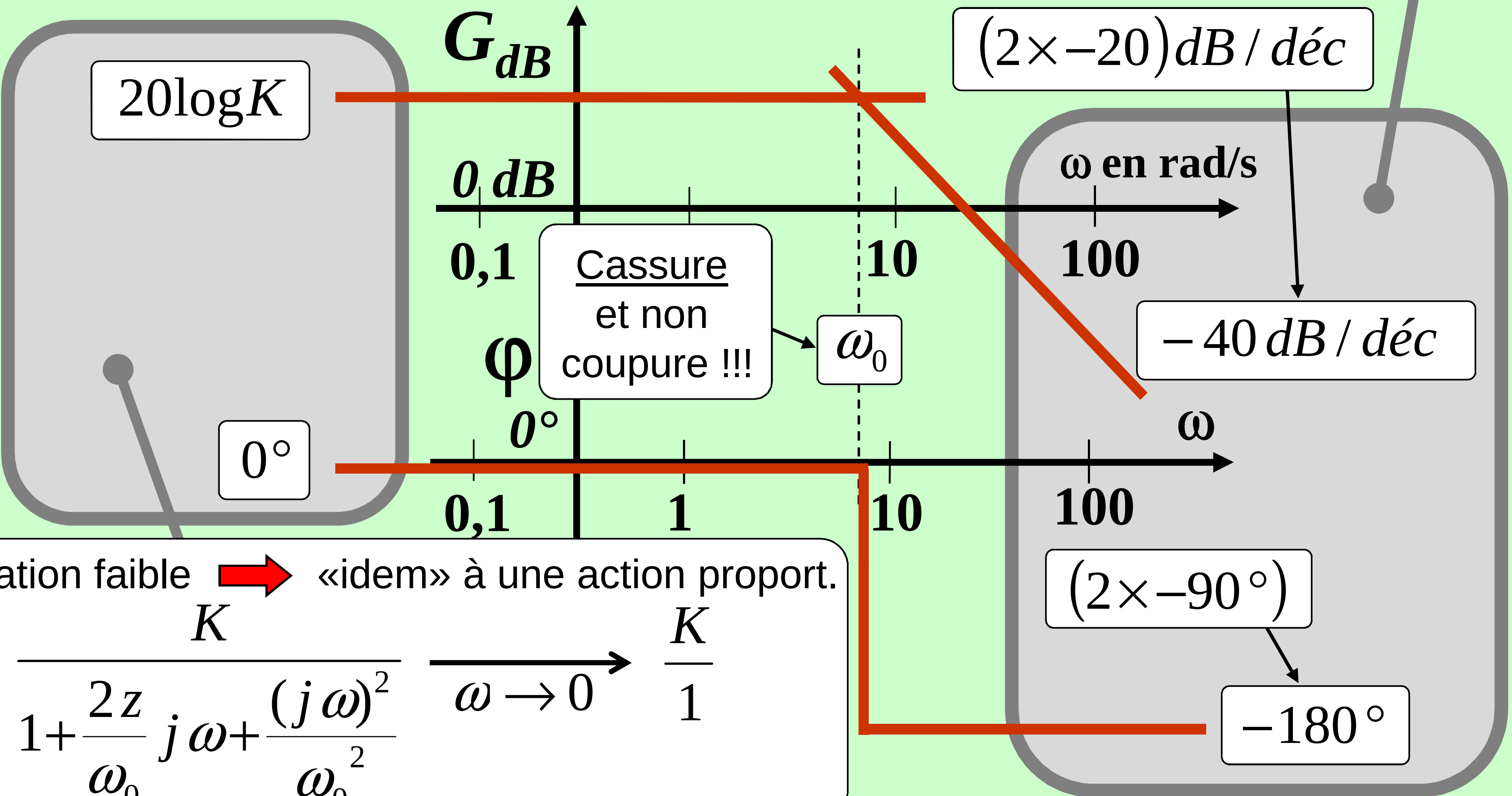
$$z < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



deuxième ordre

Pulsation élevée ➡ «idem» à un double intégrateur

$$\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^{\ 2}}} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} K\omega_0^{\ 2}\times\left(\frac{1}{j\omega}\right)^2$$



Pulsation faible ➡ «idem» à une action proport.

$$\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^{\ 2}}} \xrightarrow[\omega\to 0]{} \frac{K}{1}$$

Ce qu'il faut avoir retenu
(minimum « vital »…)

- Savoir graduer l'axe des abscisses (pulsations) :
  - soit directement en ω (rad/s) et en utilisant une échelle en log décimal
    ⇒ ainsi **1000 rad/s** sera noté **1000**.
  - soit en log décimal de ω ⇒ ainsi **1000 rad/s** sera noté **3** (moins pratique…).
- Connaître où se trouve la pulsation nulle de **0 rad/s** ⇒ à l'infini à gauche !
- La fonction de transfert harmonique correspond à la fonction de transfert étudiée en remplaçant simplement la variable de Laplace **p** (ou **s**) par **jω**.
- Savoir que la courbe des gains représente deux choses identiques :
  - 20 x (log du rapport de l'amplitude de sortie sur celle d'entrée) ⇒ $20 \times \log\left(\frac{As}{Ae}\right)$
  - et aussi : 20 x (log du module de la fonction de transfert harmonique).
    ⇒ $20 \times log\left|FT(j\omega)\right|$
- Savoir que la courbe des phases représente deux choses identiques :
  - le retard du signal de sortie par rapport à celui d'entrée («traduit» en ° ou en rad).
  - et aussi : argument de la fonction de transfert harmonique.
    ⇒ $Arg\left(FT(j\omega)\right)$
- Savoir «traduire» un retard exprimé en seconde par des degrés (ou des radians) et inversement ⇒ règle de 3 (proportionnalité).

Résultats à connaître par cœur

(et à savoir retrouver…)

Savoir tracer les courbes de gains et de phases des systèmes suivants :

Action proportionnelle : $FT(p) = cte = K$

- gains ⇨ droite horizontale à **20 log(K)**.
- phases ⇨ droite horizontale à **0°**.

Intégrateur : $FT(p) = \frac{K}{p}$

- gains ⇨ droite inclinée de pente **-20 dB/déc** coupant l'axe des abscisses à la pulsation de **K rad/s** et passant par le point d'ordonnée **20 log(K)** à la pulsation de **1 rad/s**.
- phases ⇨ droite horizontale à **-90°** (ou **–π/2**).

Intégrateur pur : $FT(p) = \frac{1}{p}$

Mêmes résultats que précédemment en remplaçant simplement **K** par **1**.

<u>Résultats à connaître par cœur</u> (suite)

(et à savoir retrouver…)

► ***<u>Premier ordre :</u>*** $FT(p) = \dfrac{K}{1+\tau\, p}$ ⇨ <u>Tracé asymptotique</u>

- gains ⇨ asymptote horizontale à **20 log(K)** pour les pulsations faibles.
  ⇨ asymptote inclinée de **-20 dB/déc** pour les pulsations élevées.
  ⇨ pulsation de <u>cassure</u> (et non coupure !) à la pulsation de **1/τ** rad/s.

- phases ⇨ droite horizontale à **0°**pour les pulsations faibles.
  ⇨ droite horizontale à **-90°** (ou **–π/2**) pour les pulsations élevées.
  ⇨ pulsation de <u>cassure</u> (et non coupure !) à la pulsation de **1/τ** rad/s.

► ***<u>Premier ordre :</u>*** ⇨ <u>Courbe réelle</u>

- gains ⇨ placée <u>dessous</u> les deux asymptotes.
  ⇨ un point connu : à la cassure on a **-3 dB** sous l'asymptote de gauche.

- phases ⇨ la courbe s'appuie sur les deux asymptotes.
  ⇨ un point connu : à la cassure on est à **-45°** (ou **–π/4**) par symétrie.

Résultats à connaître par cœur (suite et fin…)

(et à savoir retrouver…)

Deuxième ordre : $FT(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0} p + \dfrac{p^2}{\omega_0{}^2}}$ ⇨ Tracé asymptotique

- gains ⇨ asymptote horizontale à **20 log(K)** pour les pulsations faibles.
  ⇨ asymptote inclinée de **-40 dB/déc** pour les pulsations élevées.
  ⇨ pulsation de cassure (et non coupure !) à la pulsation de ω_0 rad/s.

- phases ⇨ droite horizontale à **0°**pour les pulsations faibles.
  ⇨ droite horizontale à **-180°** (ou **–π**) pour les pulsations élevées.
  ⇨ pulsation de cassure (et non coupure !) à la pulsation de ω_0 rad/s.

Deuxième ordre : ⇨ Courbe réelle

- gains ⇨ **résonance** si **z < 0,7** soit $z < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
  ⇨ si résonance (**z<0,7**) la courbe est dessus les asymptotes avec un pic placé «juste un peu» à gauche de la cassure.
  ⇨ si pas résonance (**z>0,7**) la courbe est dessous les asymptotes.

- phases ⇨ la courbe s'appuie sur les deux asymptotes.
  ⇨ un point connu : à la cassure on est à **-90°** (ou **–π/2**) par symétrie.