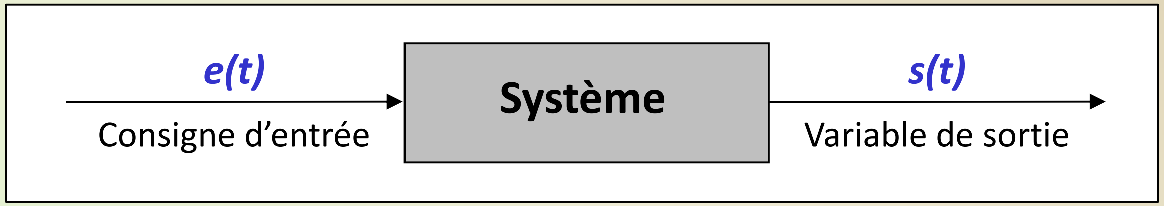
TRANSFORMEES

DE

DE LAPLACE

1) Représentation générale d'un SLCI par une équation différentielle



Un système linéaire, continu, invariant, mono variable peut être décrit par une équation différentielle linéaire (à coefficients constants) de la forme suivante :

$$a_n \times \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots\ldots + a_2 \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \times s(t) =$$

$$b_m \times \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots\ldots + b_2 \times \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{de(t)}{dt} + b_0 \times e(t)$$

$$\begin{cases} a_0 \ldots\ldots a_n \text{ et } b_0 \ldots\ldots b_m \text{ sont des constantes} \\ n \text{ est l'ordre du système} \\ m \leqslant n \end{cases}$$

2) Méthode de résolution de l'équation différentielle

$$a_n \times \frac{d^n s(t)}{dt^n} + ... + a_2 \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \times s(t) = b_m \times \frac{d^m e(t)}{dt^m} + ... + b_2 \times \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{de(t)}{dt} + b_0 \times e(t)$$

L'outil mathématique qui va nous permettre la résolution de ces équations différentielles (ordre maximal de 2) est la transformée de Laplace.

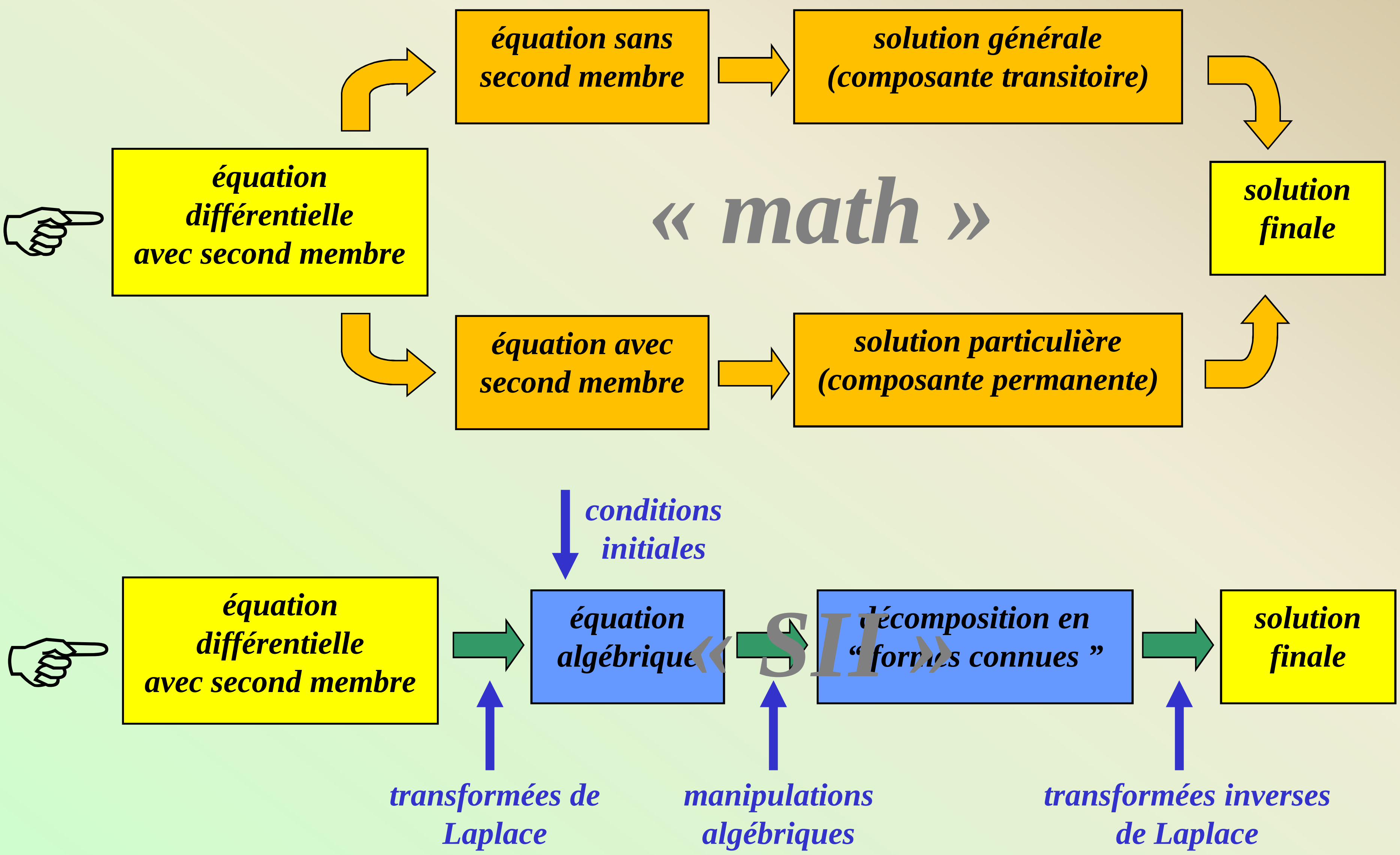
Cette transformation va nous faire passer d'une équation différentielle à une équation polynomiale, plus facile à manipuler :

$$S(p) \times \sum_{i=0}^{n} c_i \times p^i = E(p) \times \sum_{j=0}^{m} d_j \times p^j$$

Dans le domaine temporel, la variable est le temps, noté t

Dans le domaine de Laplace, la variable est notée p (ou s dans les pays anglo-saxons)

3) Comparaison méthodes de résolution math / SII



4) Définitions

▶ *On dit qu'une fonction du temps f(t) est « **causale** » si elle vérifie :*

$$\boxed{f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \leqslant 0}$$

▶ *On appellera la fonction d' **Heaviside***

(ou existence ou identité ou unitaire ou échelon unité)

*la fonction **u(t)** telle que :*

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 \Rightarrow u(t) = 0 \\ \text{pour } t > 0 \Rightarrow u(t) = 1 \end{cases}$$

➡ *quelle que soit la fonction $f(t)$: $f(t) \times u(t)$ est obligatoirement causale.*

On définit la transformée de Laplace d'une fonction causale f(t):

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f(t) \times dt$$

où p est une variable complexe

On notera la transformée de Laplace de la fonction temporelle f(t) :

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}[\,f(t)]}$$

5) Propriétés

▶ Existence et unicité :

Soit f(t) une fonction du temps.

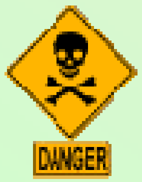
Si f(t) est continue par morceaux pour $t \in [0\,;+\infty[$ ***et si*** $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} \times f(t)$ ***est finie***

$\boxed{\text{alors } f(t) \text{ admet une transformée de Laplace unique } F(p) \text{ et inversement}}$

▶ Linéarité :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathrm{R}^2 \quad \mathcal{L}[\, a \times f_1(t) + b \times f_2(t)\,] = a \times \mathcal{L}[\, f_1(t)\,] + b \times \mathcal{L}[\, f_2(t)\,]}$$

▶ Produit de deux fonctions :



$$\cancel{\mathcal{L}[\, f_1(t) \times f_2(t)\,] = \mathcal{L}[\, f_1(t)\,] \times \mathcal{L}[\, f_2(t)\,]}$$

Dérivation :

$$\mathcal{L}[\,f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f'(t) \times dt$$

Faisons une intégration par partie :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et si leur dérivée u' et v' sont continues sur I alors quels que soient a et b éléments de I :

$$\int_a^b u'(t) \times v(t) \times dt = \left[u(t) \times v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t) \times dt$$

u'(t) **v(t)**

$$\mathcal{L}[\,f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f'(t) \times dt$$

$$= \left[e^{-pt} \times f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (e^{-pt})' \times f(t) \times dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\,f'(t)] = \left[e^{-pt}\times f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (e^{-pt})'\times f(t)\times dt}$$

$$= \cancel{\left(0 - f(0)\right)} - \int_0^{+\infty} (-p\times e^{-pt})\times f(t)\times dt$$

$$= p\times\int_0^{+\infty} e^{-pt}\times f(t)\times dt - f(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\,f'(t)] = p \times \mathcal{L}[\,f(t)] - f(t=0)}$$

Dériver dans le domaine temporel « revient à » multiplier par p dans le domaine de Laplace (aux conditions initiales près).

Dérivation double :

$$\mathcal{L}[\, f''(t)] = p \times \mathcal{L}[\, f'(t)] - f'(t{=}0)$$

$$= p \times \left\{ p \times \mathcal{L}[\, f(t)] - f(t{=}0) \right\} - f'(t{=}0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\, f''(t)] = p^2 \times \mathcal{L}[\, f(t)] - p \times f(t{=}0) - f'(t{=}0)}$$

Intégration :

$$\int_a^b u'(t)\times v(t)\times dt = \left[u(t)\times v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)\times v'(t)\times dt$$

Notons g(t) la fonction temporelle telle que : g'(t) = f(t)

$\mathcal{L}[\ g(t)] =$

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-pt}}_{u'(t)} \times \underbrace{g(t)}_{v(t)} \times dt = \left[\left(-\frac{1}{p}\times e^{-pt}\right)\times g(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{p}\times e^{-pt}\right)\times g'(t)\times dt$$

$$= \left(0-\left(-\frac{1}{p}\right)\times 1\times g(0)\right) + \frac{1}{p}\times\int_0^{+\infty} e^{-pt}\times g'(t)\times dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\ g(t)] = \frac{1}{p}\times\mathcal{L}[\ f(t)] + \frac{1}{p}\times g(t=0)}$$

Intégrer dans le domaine temporel « revient à » diviser par p dans le domaine de Laplace (aux conditions initiales près).

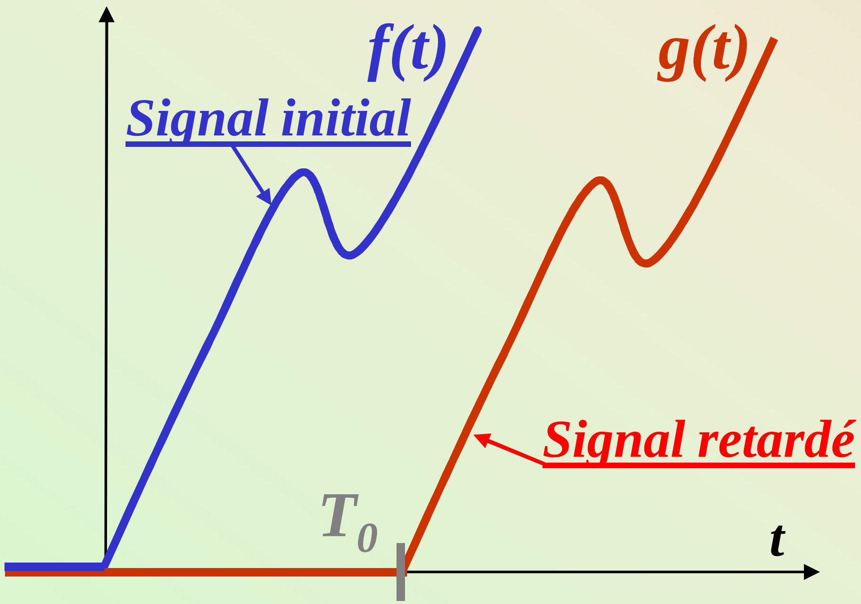
Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p \times F(p)$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p \times F(p)$$

Théorème du retard :



Soient deux fonctions temporelles causales f(t) et g(t)

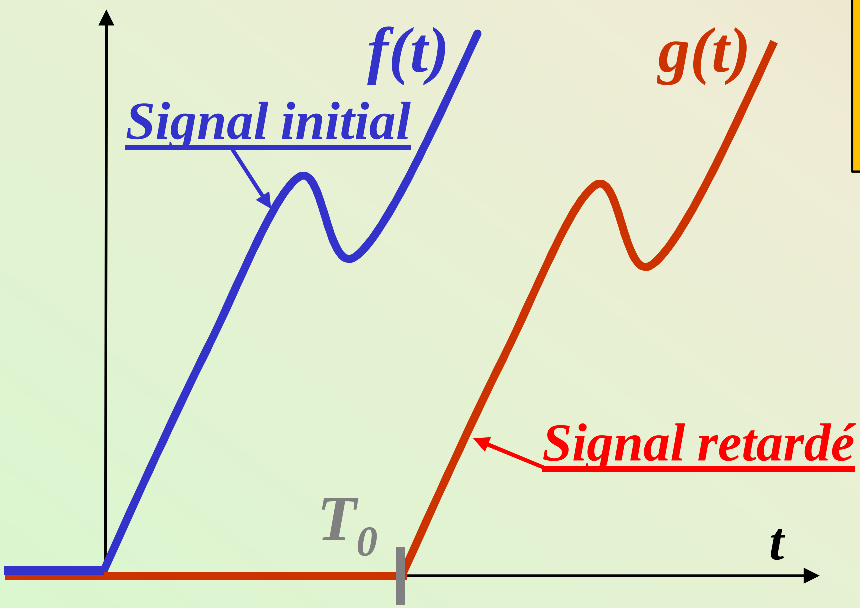
→ ***g(t) est « retardée » d'une durée T_0***

$$\boxed{g(t) = f(t-T_0)}$$

On suppose connaître la transformée de Laplace de f(t) soit : $\mathcal{L}[\,f(t)]$

$$\mathcal{L}[\,g(t)] = \mathcal{L}[\,f(t-T_0)]$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f(t-T_0) \times dt$$



$$\mathscr{L}[\,g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f(t-T_0)\times dt$$

Posons : $x = t - T_0$ ⇒ $t = x + T_0$

⇒ $dt = dx$

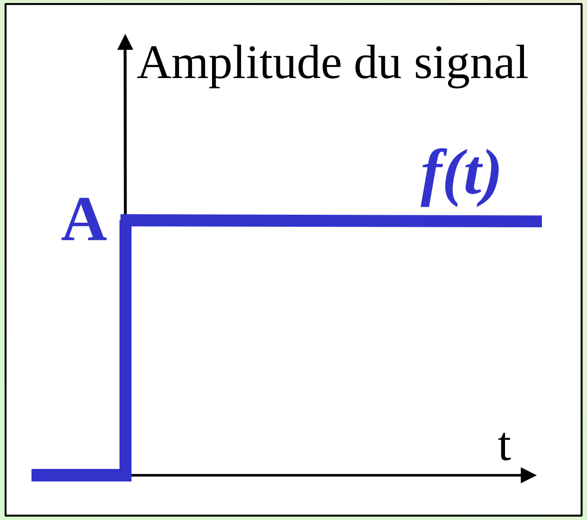
$$\mathscr{L}[\,g(t)] = \int_{-T_0}^{+\infty} e^{-p(x+T_0)} \times f(x)\times dx = e^{-T_0\times p}\int_{-T_0}^{+\infty} e^{-px}\times f(x)\times dx$$

$$= e^{-T_0\times p}\times\left[\cancel{\int_{-T_0}^{0} e^{-px}\times f(x)\times dx} + \int_0^{+\infty} e^{-px}\times f(x)\times dx\right]$$

⇒ $$\boxed{\mathscr{L}[\,g(t)] = e^{-T_0\times p} \times \mathscr{L}[\,f(t)]}$$

6) Transformées de Laplace des fonctions courantes

Echelon : *soit un échelon d'amplitude A* ⟶ $f(t) = A \quad \text{pour} \quad t > 0$



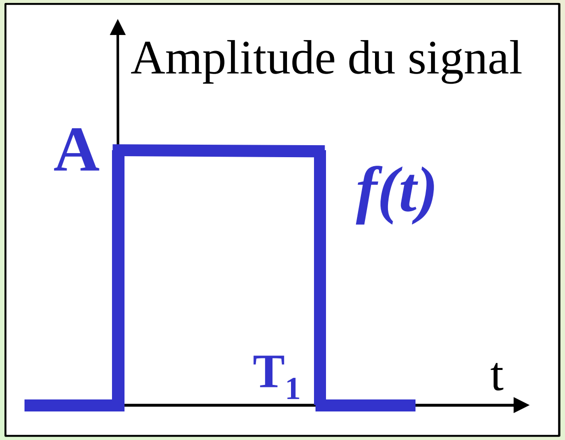
$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times A \times dt = A \times \left[-\frac{1}{p} \times e^{-pt}\right]_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{A}{p}$$

Nota : *pour l'échelon unitaire (A = 1)* ⇒ $\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{1}{p}$

On parlera de réponse indicielle.

<u>Créneau :</u> *soit un créneau d'amplitude A et de durée T_1*



$$\longrightarrow \boxed{f(t) = A \quad pour \quad 0 < t < T_1}$$

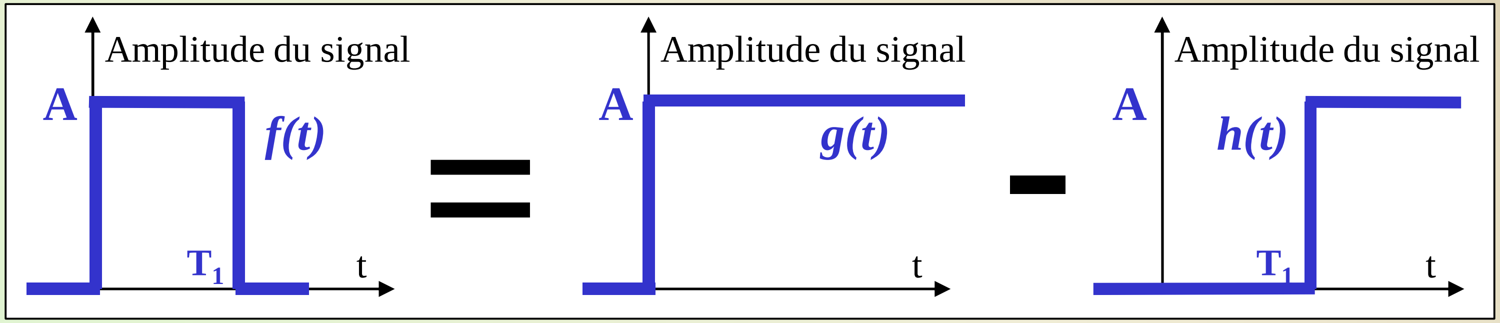
$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f(t) \times dt$$

$$= \int_0^{T_1} e^{-pt} \times A \times dt + \cancel{\int_{T_1}^{+\infty} e^{-pt} \times 0 \times dt}$$

$$= \left[-\frac{1}{p} \times e^{-p \times t} \times A \right]_0^{T_1} = -\frac{1}{p} \times e^{-p \times T_1} \times A - \left(-\frac{A}{p} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{A}{p} \times \left(1 - e^{-pT_1} \right)}$$

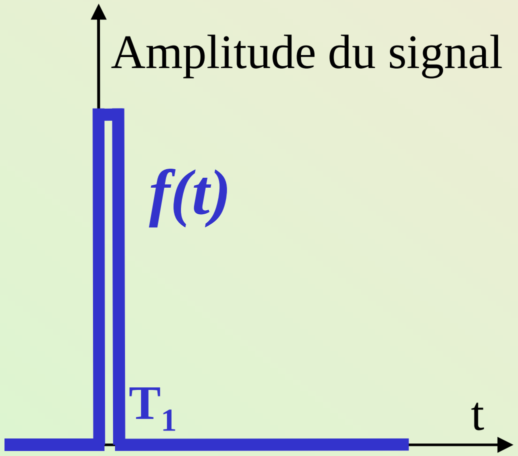
Graphiquement :



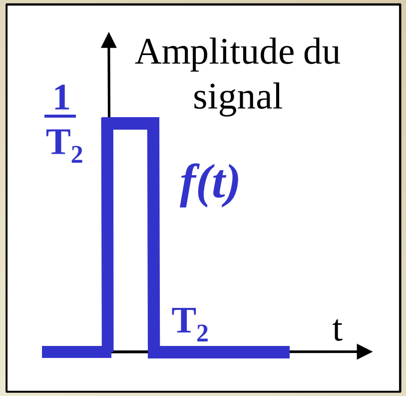
$$\mathcal{L}[\,f(t)] \;=\; \frac{A}{p} \;-\; \frac{A}{p}\times e^{-pT_1}$$

Impulsion de Dirac : *amplitude infinie pour une durée infiniment courte*

représente un choc mécanique, un flash…



Modélisons par un créneau d'amplitude $\frac{1}{T_2}$ et d'une durée infiniment brève :



Transformée du créneau

$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{A}{p}\times\left(1-e^{-pT_2}\right)$$

$\frac{1}{T_2}$

Développement limité de l'exponentielle
(au voisinage de 0)

$$e^{x} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$-p.T_2$

$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \lim_{T_2\to 0}\frac{1}{p\times T_2}\times\left(1-e^{-pT_2}\right) \approx \lim_{T_2\to 0}\frac{1}{p\,T_2}\times\left[\cancel{1}-\left(\cancel{1}+\left(\frac{-pT_2}{1!}\right)\right)\right] = \boldsymbol{1}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\,f(t)] = 1}$$

Exponentielle :

$$f(t) = e^{-at}$$

$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f(t) \times dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times e^{-at} \times dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \times dt$$

$$= \left[-\frac{1}{p+a} \times e^{-(p+a)t} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p+a} \times (0-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{1}{p+a}}$$

Sinus :

$$\boxed{f(t) = \sin(\omega t)} \quad \mathcal{L}[\,f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times f(t) \times dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-pt}}_{v(t)} \times \underbrace{\sin(\omega t)}_{u'(t)} \times dt$$

Intégrons par partie :

$$\boxed{\int_a^b u'(t) \times v(t) \times dt = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t) \times dt}$$

d'où :

$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \left[-\frac{1}{\omega} \times \cos(\omega\, t) \times e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{\omega} \times \cos(\omega\, t) \right) \times \left(-p\, e^{-pt}\right) \times dt$$

$$= -\frac{1}{\omega} \times (0 - 1 \times 1) - \frac{p}{\omega} \times \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times \cos(\omega\, t) \times dt$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega} \times \int_0^{+\infty} e^{-pt} \times \cos(\omega\, t) \times dt$$

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}\times\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-pt}}_{v(t)}\times\underbrace{\cos(\omega\, t)}_{u'(t)}\times dt$$

Intégrons à nouveau par partie :

$$\int_a^b u'(t)\times v(t)\times dt = \left[u(t)\times v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)\times v'(t)\times dt$$

$$\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}\times\left\{\left[+\frac{1}{\omega}\times\sin(\omega\, t)\times e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(+\frac{1}{\omega}\times\sin(\omega\, t)\right)\times\left(-p\, e^{-pt}\right)\times dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}\times\left\{\cancel{(0 - 0\times 1)} + \frac{p}{\omega}\times\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-pt}\times\sin(\omega\, t)\times dt}_{\mathcal{L}[\,f(t)]}\right\}$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{p^2}{\omega^2}\times\mathcal{L}[\,f(t)]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[\,f(t)]\times\left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$$

7) Tableau récapitulatif (fonctions causales)

Dirac	$\mathcal{L}[\,f(t)] = 1$	$\sin(\omega t)$	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
A	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{A}{p}$	$\cos(\omega t)$	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
Bxt	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{B}{p^2}$	$e^{-at}\times\sin(\omega t)$	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{1}{p+a}$	$e^{-at}\times\cos(\omega t)$	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
t^n	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\mathcal{L}[\,f(t)] = \dfrac{1}{p(1+\tau p)}$

FIN