CRITERES DE QUALITE

Différents critères sont utilisés pour définir la qualité d'un asservissement.

Le principal est la stabilité mais d'autres peuvent être tout aussi importants, notamment la précision, la rapidité et l'amortissement.

Un asservissement sera d'autant meilleur qu'il est

stable, précis et rapide

1) PRECISION

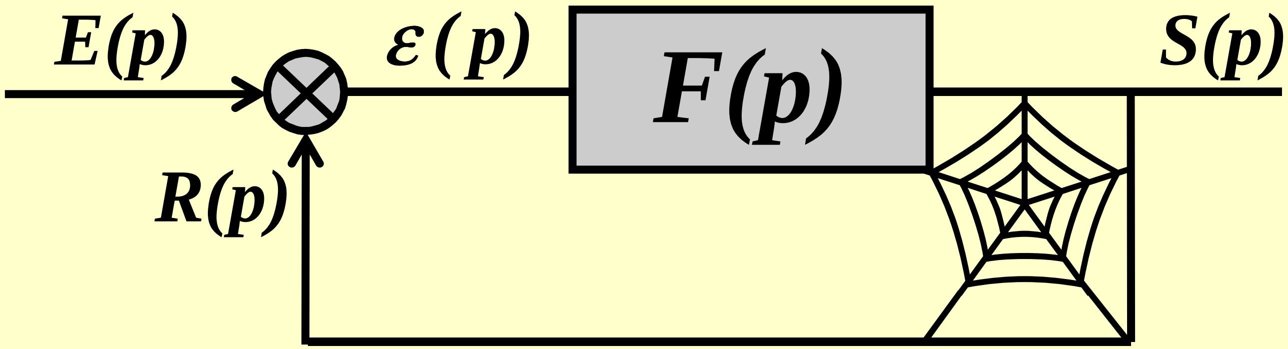
2) RAPIDITE

3) AMORTISSEMENT

1) Précision

a) Généralités :

Soit le système asservi suivant :



Bien noter que tout asservissement peut se ramener à cette structure comportant un retour unitaire.

$$R(p) = S(p)$$

D’un point de vue précision on souhaite que la sortie $s(t)$ évolue parfaitement à tout instant avec la consigne $e(t)$.

ce critère concerne le régime permanent.

b) Définitions :

On définit la précision d'un asservissement, une fois le régime permanent atteint, par la différence entre l 'entrée et la sortie $e(t) - s(t)$ appelée erreur.

Le système étant à retour unitaire cette différence $e(t) - s(t)$ est en fait égale à la différence $\mathcal{E}(t) = e(t) - r(t)$ en sortie du comparateur appelée écart.

Un système sera dit précis en régime établi si son écart ε (t) tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$$

En réalité cet écart ne sera jamais tout à fait nul car :

- ***l'entrée varie dans le temps d'où des problèmes de poursuite.***
- ***la présence de perturbations génère des problèmes de régulation.***

Nota : ***pour un système asservi, l'écart joue un rôle fonctionnel.***

En effet il assure en fait la commande de la boucle, donc l'énergie de commande de l'actionneur et donc (par amplification) l'énergie nécessaire à l'évolution de la sortie.

Un écart nul implique donc une commande nulle et donc l'arrêt de l'actionneur.

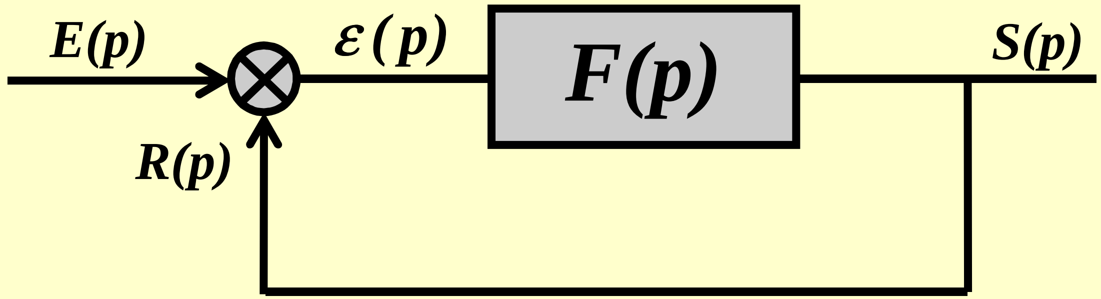
c) Influence du gain statique global K de la BO :

On suppose se placer en régime établi et on cherche à calculer :

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$$

Si le système est stable on peut alors utiliser le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p)$$



Expression de l'écart :

$$\varepsilon = E - R = E - S = E - E.\frac{F}{1+F}$$

$$= E.\left(1 - \frac{F}{1+F}\right) = E.\left(\frac{1+\cancel{F}-\cancel{F}}{1+F}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon = E.\frac{1}{1+FTBO}}$$

On remarque que l'écart ne dépend que de l'entrée E(p) et de la FTBO.

$$\varepsilon = E \cdot \frac{1}{1 + FTBO}$$

Cherchons à écrire la **FTBO** sous la forme suivante :

gain de la BO

$\in N$

$$\frac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}$$

☞ K_{BO} **: gain statique global de la BO.**

☞ α **: classe du système représente le nombre d'intégrateurs dans la BO.**

☠ ***Ce nombre est différent de l'ordre du système !!!***

$$\frac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots}$$

tend vers 1 quand $p \to 0$

On remarque donc qu'au voisinage de zéro (pour p) la FTBO est équivalente à :

$$\boxed{\frac{K_{BO}}{p^{\alpha}}}$$

$$\varepsilon = E \cdot \frac{1}{1 + FTBO}$$

$$FTBO \xrightarrow[p \to 0]{} \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} \left(p \cdot \frac{E}{1 + \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}}} \right)$$

$$= \lim_{p \to 0} \left(\frac{p^{\alpha+1} \cdot E}{p^{\alpha} + K_{BO}} \right)$$

⇒ *l 'écart est donc d 'autant plus petit que le gain global K de la BO est grand*

Conclusion

Pour que l’écart en régime permanent soit faible il faut que le gain statique global de la BO soit grand.

Les conditions de stabilité et de précision sont contradictoires

un compromis est à trouver

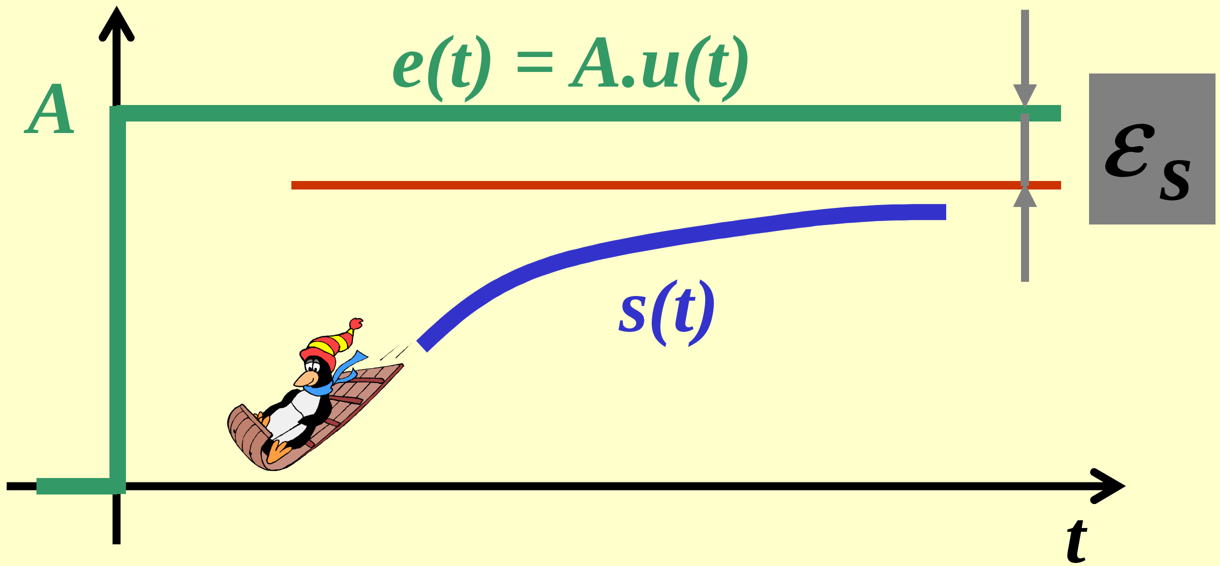
d) Réponse à un échelon → écart statique :

On parle aussi *d'erreur statique* ou *d'écart de position*

idem car retour unitaire

Notation : $\mathcal{E}_S$

Soit l'entrée en échelon suivante → $E(p)=\dfrac{A}{p}$



On a $\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to 0}p.\varepsilon(p)=\lim\limits_{p\to 0}\left(\dfrac{p^{\alpha+1}.E}{p^{\alpha}+K_{BO}}\right)$

$$=\boxed{\lim_{p\to 0}\frac{p^{\alpha}.A}{p^{\alpha}+K_{BO}}}$$

$$\mathcal{E}_s = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha} . A}{p^{\alpha} + K_{BO}}$$

Etude en fonction de la classe du système :

- $\alpha = 0$ le système est sans intégration et l'écart statique vaut : $\frac{A}{1+K_{BO}}$

Cet écart est donc d'autant plus faible que le gain statique global K de la BO est grand.

- $\alpha > 0$ le système a au moins un intégrateur et l'écart statique est alors nul. 0

Conclusion

☞ - pour avoir une précision statique parfaite il faut un intégrateur dans la BO (chaîne directe ou boucle de retour).

☞ - si le système n'a pas d'intégrateur dans la BO l'écart statique ε_s vaut $\boxed{\dfrac{A}{1+K_{BO}}}$ et décroît quand le gain statique K de la BO augmente.

☞ - la précision statique est proportionnelle au niveau A de la consigne.

e) Réponse à une rampe ⟶ écart de poursuite :

On parle aussi d'erreur ou d'écart de traînage

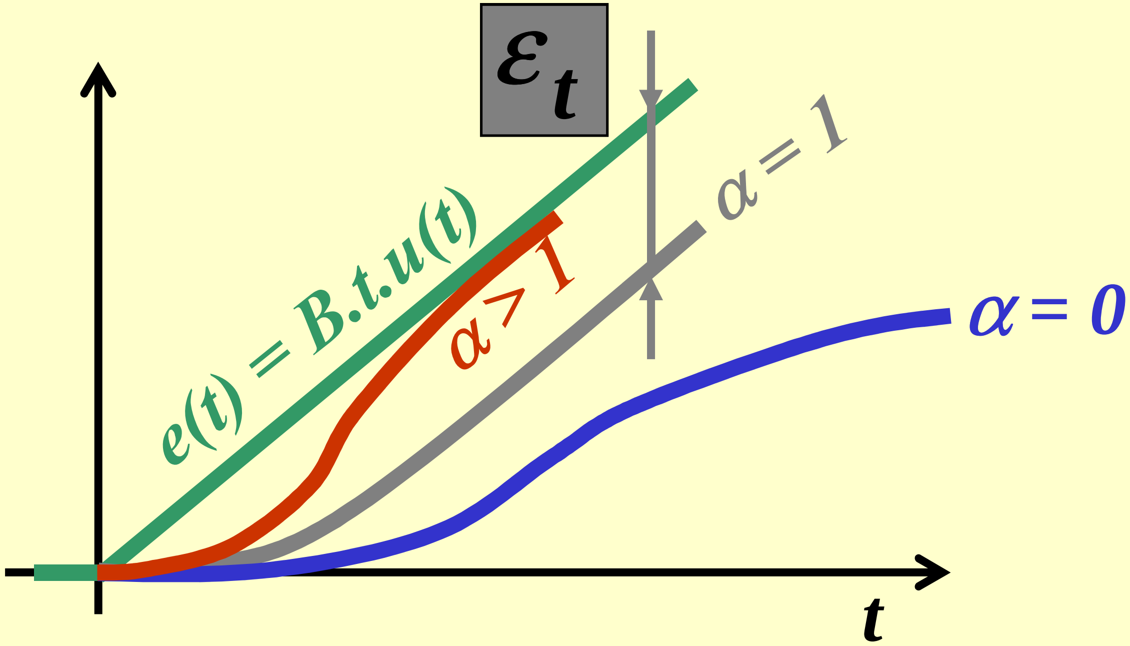
idem car retour unitaire

Notation : ε_t

Soit l'entrée en rampe suivante →

$$e(t) = B.t$$

$$E(p) = \frac{B}{p^2}$$



On a $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}.E}{p^{\alpha}+K_{BO}}\right)$

$$= \boxed{\lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha-1}.B}{p^{\alpha}+K_{BO}}}$$

$$\varepsilon_t = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha - 1} \cdot B}{p^{\alpha} + K_{BO}}$$

Etude en fonction de la classe du système :

- $\alpha = 0$ le système est sans intégration l'écart de poursuite tend vers l'infini : ∞

- $\alpha = 1$ le système a un intégrateur dans la BO et l'écart de poursuite vaut alors : $\dfrac{B}{K_{BO}}$

  Ecart d'autant plus faible que K_{BO} est grand.

- $\alpha > 1$ le système a plus d'un intégrateur et l'écart de poursuite tend vers 0 : 0

f) Conclusion générale :

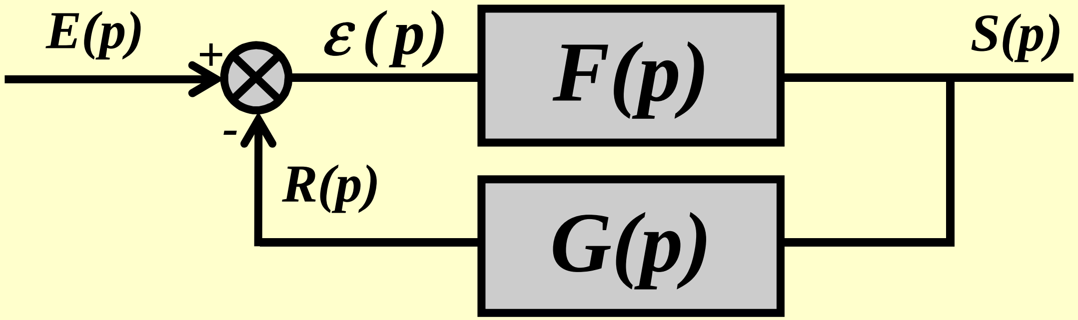
	classe 0	classe 1	classe > 1
écart de position ε_s	$\dfrac{A}{1+K_{BO}}$	0	0
écart de poursuite ε_t	∞	$\dfrac{B}{K_{BO}}$	0

FIN DE LA PREMIERE PARTIE

Cas du retour non unitaire

Rappel : si retour unitaire

$$\boxed{\varepsilon = E \cdot \frac{1}{1+FTBO}}$$



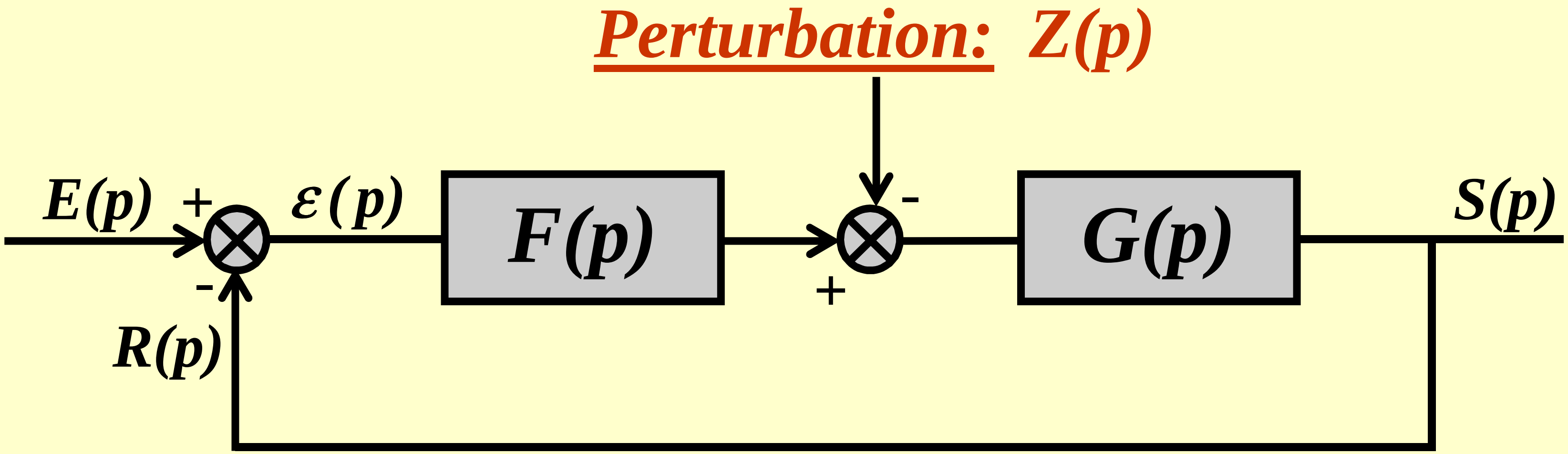
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= E - G.S \\ S &= F.\varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon = E - G.F.\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon.(1+F.G) = E$$

soit $\varepsilon = \dfrac{E}{1+F.G} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = E \cdot \dfrac{1}{1+FTBO}}$

g) Influence d'une perturbation :

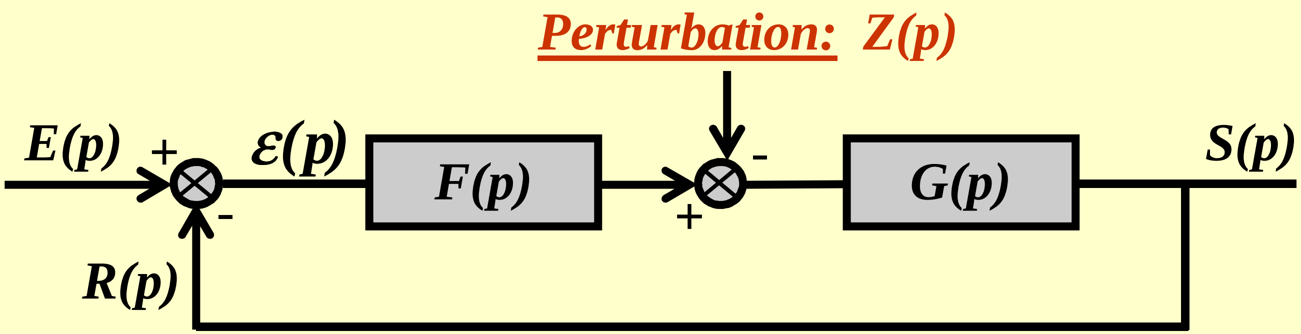
Soit le système suivant :



Calculons l'écart $\varepsilon(p)$ en régime établi :

deux méthodes → théorème de superposition / calcul direct

Première méthode → Théorème de superposition

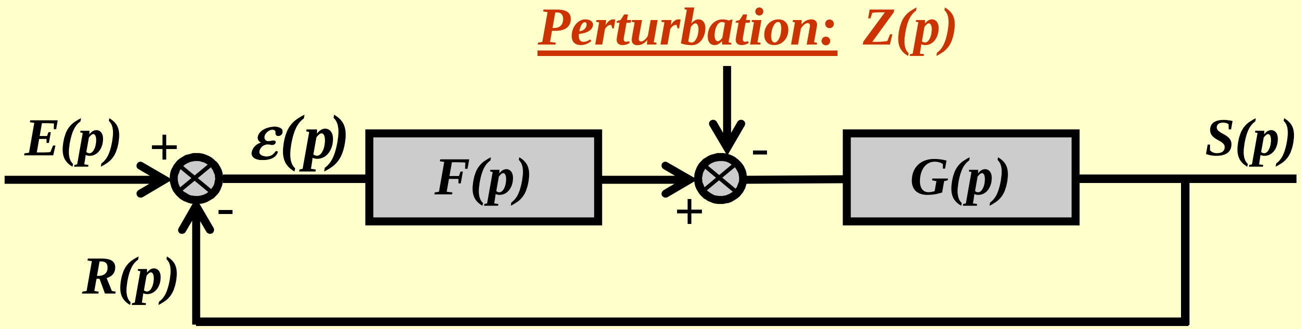


$Z(p) = 0$ ⟹ $$\frac{S_1}{E} = \frac{F.G}{1+F.G}$$

$E(p) = 0$ ⟹ $$\frac{S_2}{Z} = -1 \,.\, \frac{G}{1+F.G}$$

d'où $$\boxed{S = S_1 + S_2 = \frac{F.G}{1+F.G}\,.\,E - \frac{G}{1+F.G}\,.\,Z}$$

Première méthode → Théorème de superposition



or $\mathcal{E} = E - R = E - S$

$$S = \frac{F.G}{1+F.G}.E - \frac{G}{1+F.G}.Z$$

$$= E\left(\frac{1+\cancel{F}.G-\cancel{F}.G}{1+F.G}\right) + \frac{G}{1+F.G}.Z$$

$$= \frac{1}{1+F.G}.E + \frac{G}{1+F.G}.Z$$

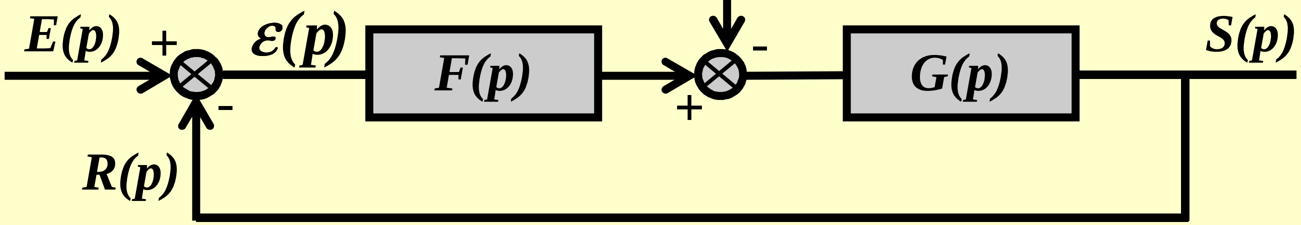
Part de l 'écart dû aux variations de l 'entrée

Part de l 'écart dû aux variations de la perturbation

Deuxième méthode → Calcul direct

$$\mathcal{E} = \frac{1}{1+F.G}.E + \frac{G}{1+F.G}.Z$$

Perturbation: $Z(p)$



$$\mathcal{E} = E - R = E - S \quad \leftarrow \quad G.\left(-Z + F.\,\mathcal{E}\right)$$

d 'où $$\mathcal{E} = E + G.Z - G.F.\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}.\left(1+F.G\right) = E + G.Z$$

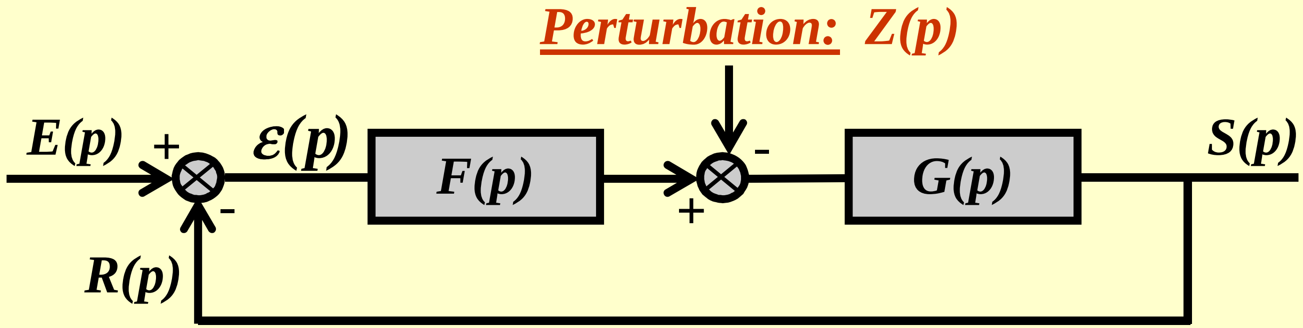
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{1+F.G}.E + \frac{G}{1+F.G}.Z}$$ ☺

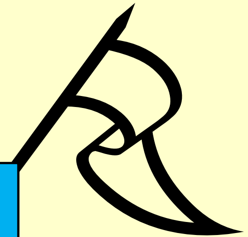
Hypothèses :

☞ on suppose une perturbation en échelon unitaire ⟹ $Z(p) = \frac{1}{p}$

☞ on suppose être à une position d 'équilibre sans signal d 'entrée ⟹ $E(p) = 0$

d 'où
$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p)$$
$$= \lim_{p\to 0} p.\left(0 + \frac{G}{1+F.G}.\frac{1}{p}\right)$$
$$= \boxed{\lim_{p\to 0} \frac{G}{1+F.G}}$$



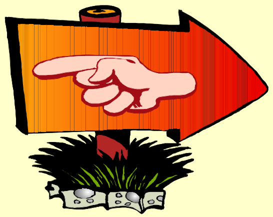


On a donc :

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} \frac{G}{1 + F.G}$$

Conclusion

L'écart est nul si F a au moins une intégration.



il faut un intégrateur placé en amont de la perturbation

2) RAPIDITE

a) Généralités :

Contrairement à la stabilité et à la précision qui concernent essentiellement le régime permanent, la rapidité relève plutôt du régime transitoire.

b) Temps de réponse :

Le critère classique relatif à la rapidité est le temps de réponse.

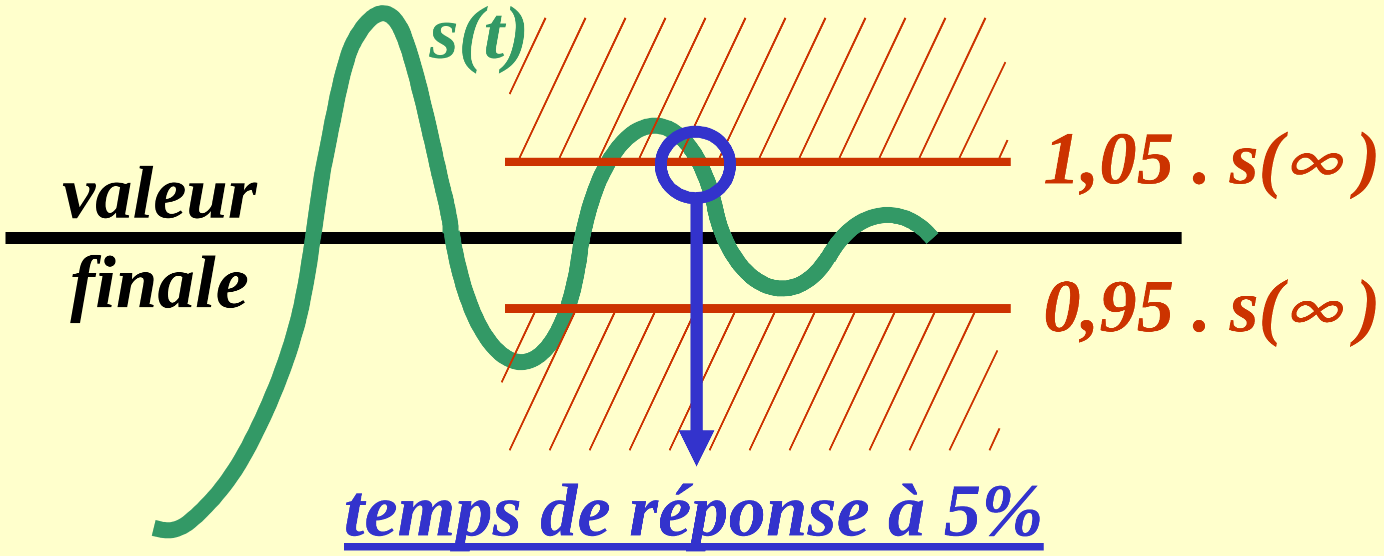
En général on considère le temps de réponse à 5%

En réponse à un échelon on a :

☞ - pour un premier ordre :

$t_{r5\%} = 3\,\tau$

☞ - pour un second ordre avec oscillations :

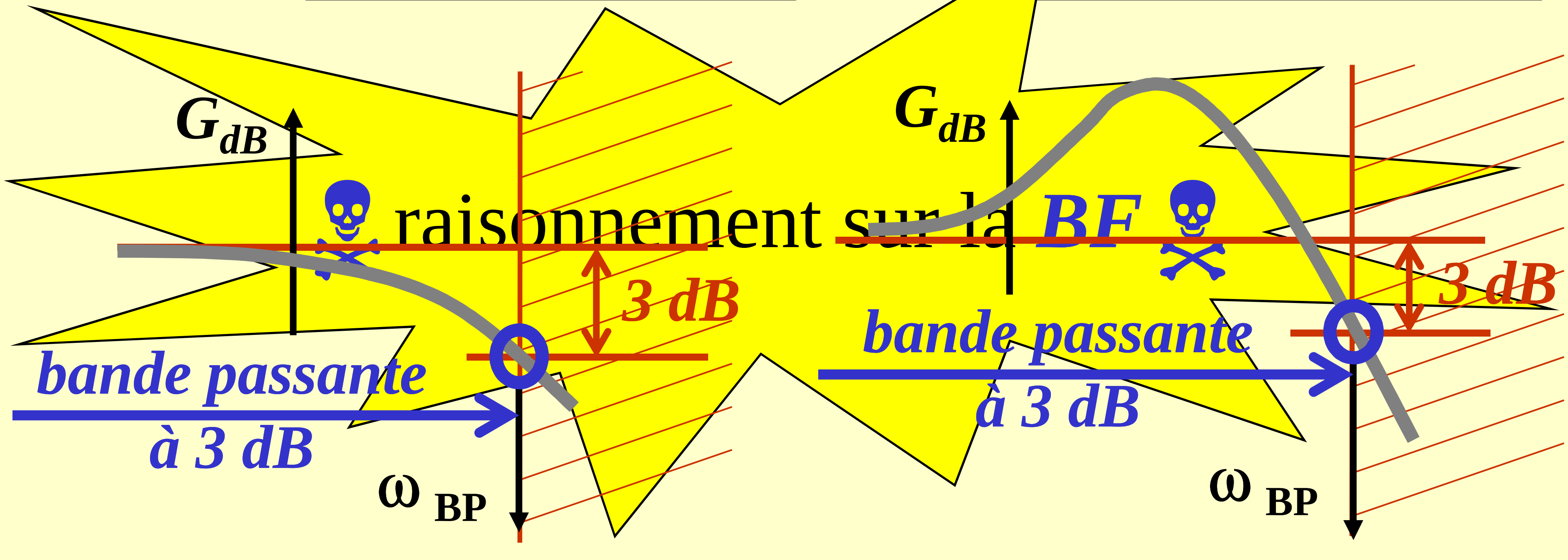


c) Bande passante :

Un autre critère pour définir la rapidité d'un système est sa bande passante (par exemple à 3 dB)

on parle aussi de BP à -3 dB

on peut définir aussi la BP à 5 dB

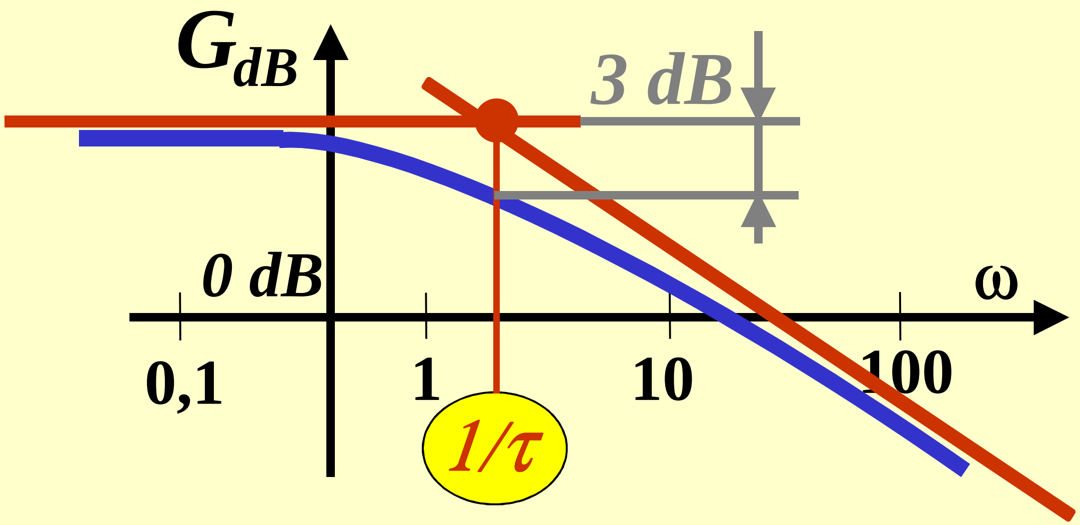


Plus la BP est élevée et plus le système est rapide.

en effet le système réagira à des fréquences élevées dont le « *front montant* » se rapproche de celui d'un échelon.

Exemple d'un premier ordre:

si τ ↘



BP ↗ car *$1/\tau$* ↗

et rapidité ↗

car $tr_{5\%} = 3\tau$ ↘

3) AMORTISSEMENT

a) Généralités :

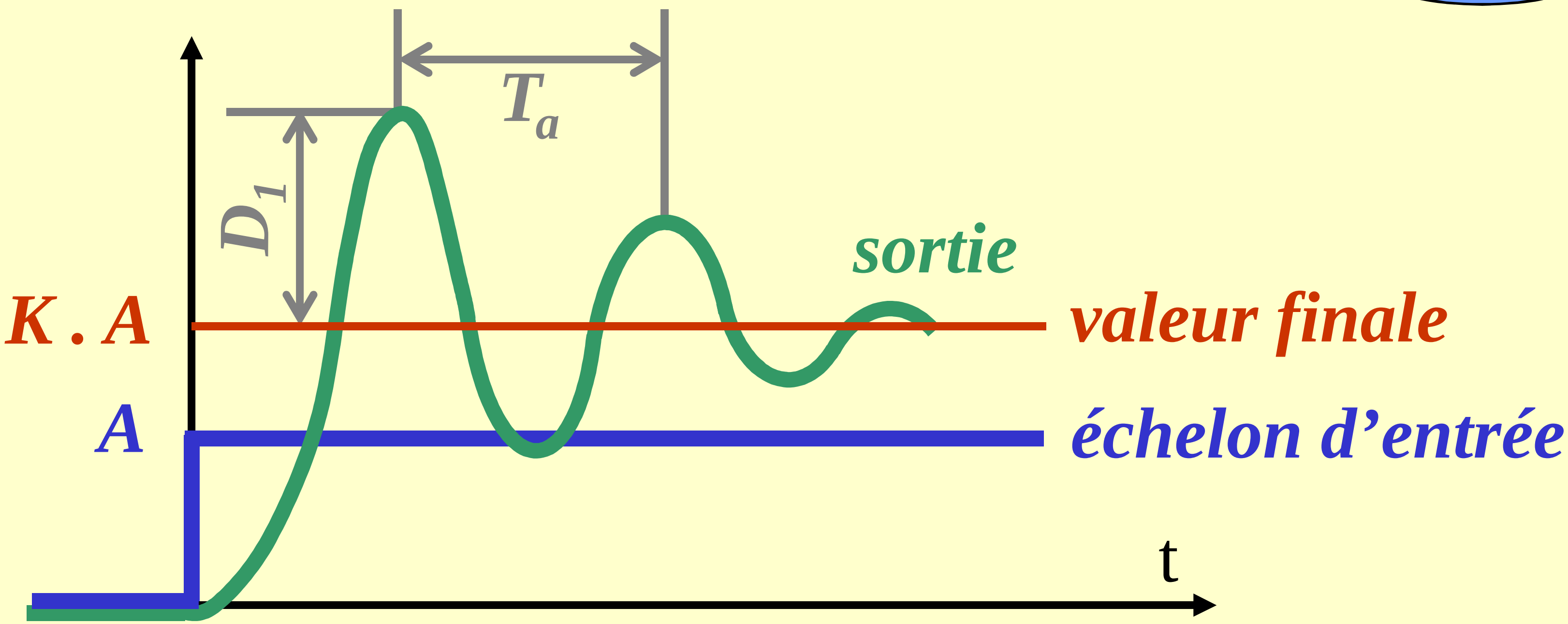
On parle d'amortissement d'un système asservi lorsque celui-ci présente des oscillations.

A noter que ce critère concerne le régime transitoire.

b) Définitions :

On définit le niveau d'amortissement (en régime transitoire) par les dépassements successifs D_i et notamment par la valeur D_1 du premier de ces dépassements.

Rappel pour un second ordre oscillant : $\Rightarrow$ $z < 1$



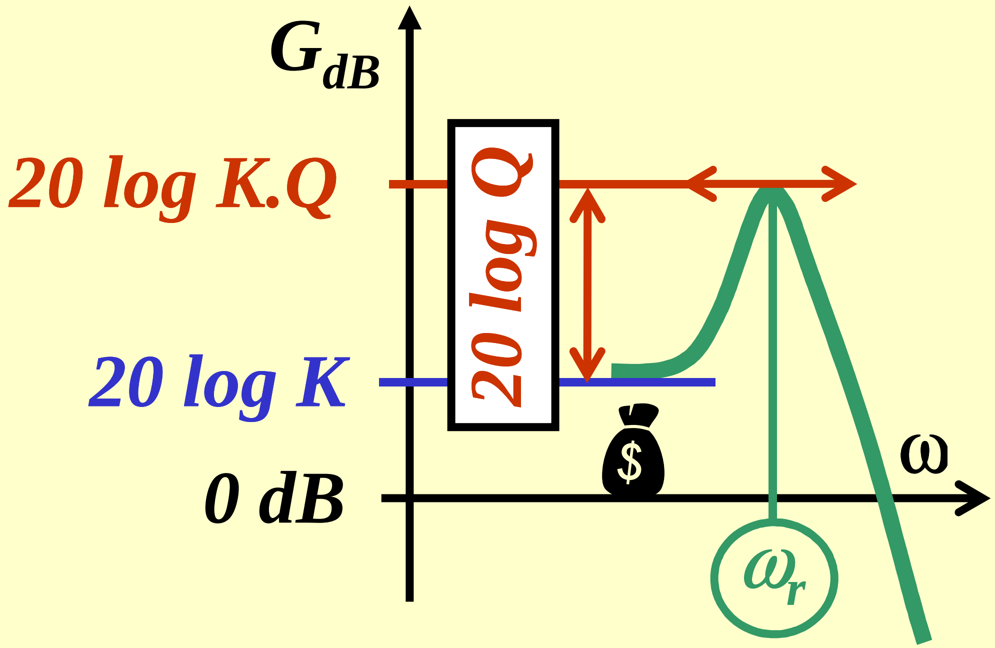
$$D_1 = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

pour

$$t = \frac{Ta}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

c) Cas des systèmes résonants :

On caractérise le phénomène de résonance notamment par le facteur de surtension Q.



Un système est d'autant plus amorti que son facteur de surtension Q est petit.

Cas d'un second ordre résonant : → $z < 0,7$

$$Q = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

si z ↗ { Q ↘ ; réponse de plus en plus amortie }

Classiquement on se fixe $Q = 1,3$ soit $2,3$ dB

FIN