SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE

ETUDE TEMPORELLE

1) Equation différentielle

Un système est dit du deuxième ordre quand il est régi par l'équation différentielle suivante :

e(t)
Consigne d'entrée

$$\frac{1}{\omega_0^2} \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

s(t)
Variable de sortie

Pulsation propre du système non amorti

Facteur d'amortissement

Gain statique

2) Fonction de transfert

$$\frac{1}{\omega_0^2}\times\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\times\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\times e(t)$$

Passons dans le domaine de Laplace en utilisant le théorème de la dérivation :

<u>Nota :</u> la fonction de transfert traduit l'évolution du système depuis une position d'équilibre donc les conditions initiales sont nulles.

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2}\times p^2\ S(p)+\frac{2z}{\omega_0}\times p\ S(p)+S(p)=K\times E(p)$$

$$\Rightarrow S(p)\times\left(\frac{1}{\omega_0^2}\times p^2+\frac{2z}{\omega_0}\times p+1\right)=K\times E(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{FT(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}\times p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

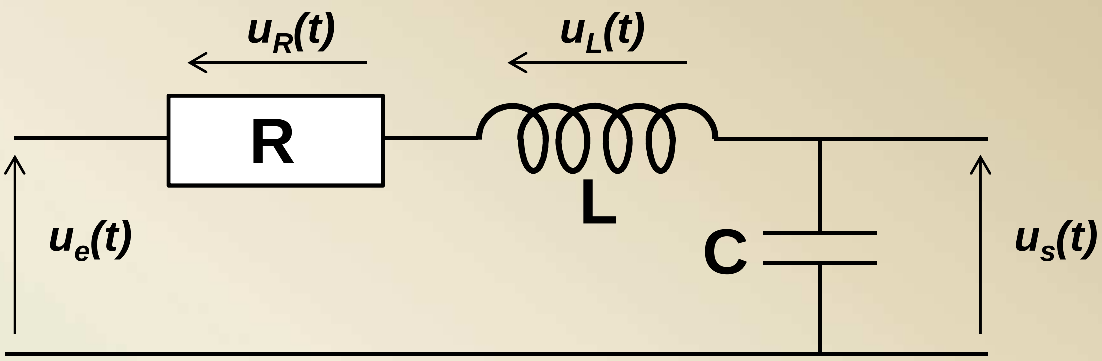
Gain statique

Pulsation propre du système non amorti

Facteur d'amortissement

3) Exemple

circuit RLC



- *R : résistance électrique (en Ohm)*
- *L : inductance de la bobine (en Henry)*
- *C : capacité du condensateur (en Farad)*
- *q : charge du condensateur (en Coulomb)*

- ***Condensateur*** ➡ $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ ***avec*** $q(t) = C \times u_s(t)$ ➡ $i(t) = C \times \dfrac{du_s(t)}{dt}$
- ***Bobine*** ➡ $u_L(t) = L \times \dfrac{d\,i(t)}{dt}$
- ***Résistance*** ➡ $u_R(t) = R \times i(t)$
- ***Loi des mailles*** ➡ $u_e(t) = u_s(t) + u_L(t) + u_R(t) = u_s(t) + L.\dfrac{d\,i(t)}{dt} + R.i(t)$

$$i(t) = C \times \frac{du_s(t)}{dt}$$

$$u_e(t) = u_s(t) + L.\frac{d\,i(t)}{dt} + R.i(t)$$

$$\Rightarrow \quad u_e(t) = u_s(t) + L.C.\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + R.C.\frac{d\,u_s(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad L.C.\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + R.C.\frac{d\,u_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t)$$

De la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}} \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

avec

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}} = LC \qquad \frac{2z}{\omega_0} = RC \qquad K = 1$$

4) Réponse à un échelon

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2} \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)}$$

Prenons un échelon d'amplitude A ➡ $e(t) = A \times u(t)$ ← **Fonction d'Heaviside**

Utilisons le théorème de dérivation pour passer dans le domaine de Laplace

On cherche l'évolution d'un système depuis une position d'équilibre

➡ *les conditions initiales sont nulles*

On a donc : $$\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2\ S(p) + \frac{2z}{\omega_0} \times p\ S(p) + S(p) = K \times \frac{A}{p}$$

➡ $$S(p) \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right) = \frac{K\,A}{p}$$

➡ $$\boxed{S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}}$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\boxed{\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1} \right)}$$

Essayons de factoriser le dénominateur ➡ ***calculons le discriminant***

$$\Delta = "b^2 - 4ac" = \left(\frac{2z}{\omega_0}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{\omega_0^2} \times 1 = \frac{4z^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2}$$

➡ $$\boxed{\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2 - 1\right)}$$

Nous avons trois cas d'étude :

- $\Delta > 0$ ➡ $z > 1$

  Le système est dit « <u>amorti</u> » ou « <u>non oscillant</u> » ou « <u>apériodique</u> »

- $\Delta = 0$ ➡ $z = 1$

  Le système est dit « <u>apériodique critique</u> » ou « <u>critique</u> »

- $\Delta < 0$ ➡ $z < 1$

  Le système est dit « <u>oscillant</u> » ou « <u>sous amorti</u> » ou « <u>pseudopériodique</u> »

4-1) Premier cas :

$z > 1$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^{2}} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}$$

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^{2}} \times \left(z^2 - 1 \right)$$

On a deux pôles réels :

- $$p_1 = \text{"}\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\text{"} = \frac{-\frac{2z}{\omega_0} + \sqrt{\frac{4}{\omega_0^{2}} \times \left(z^2-1\right)}}{2 \times \frac{1}{\omega_0^{2}}} = \frac{-\frac{\cancel{2}\,z}{\cancel{\omega_0}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{\omega_0}}\sqrt{z^2-1}}{\frac{\cancel{2}}{\omega_0^{\cancel{2}}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 = -\omega_0 \times \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)}$$

- $$p_2 = \text{"}\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\text{"} = \frac{-\frac{2z}{\omega_0} - \sqrt{\frac{4}{\omega_0^{2}} \times \left(z^2-1\right)}}{2 \times \frac{1}{\omega_0^{2}}} = \frac{-\frac{\cancel{2}\,z}{\cancel{\omega_0}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{\omega_0}}\sqrt{z^2-1}}{\frac{\cancel{2}}{\omega_0^{\cancel{2}}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_2 = -\omega_0 \times \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)}$$

4-1) Premier cas :

$$z > 1$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}$$

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2 - 1 \right)$$

$$p_1 = -\omega_0 \times \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$p_2 = -\omega_0 \times \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

D'où la factorisation suivante :

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \frac{1}{\omega_0^2} \left(p - p_1 \right) \times \left(p - p_2 \right)}$$

$$S(p)=\frac{K\,A}{p\times\frac{1}{\omega_0^{\;2}}\left(p-p_1\right)\times\left(p-p_2\right)}$$

Mettons p_1 et p_2 en facteur :

$$\left(1-\frac{p}{p_1}\right)\times\left(1-\frac{p}{p_2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad S(p)=\frac{K\,A}{p\times\boxed{\frac{1}{\omega_0^{\;2}}\times p_1\,p_2}\times\boxed{\left(\frac{p}{p_1}-1\right)\times\left(\frac{p}{p_2}-1\right)}}$$

$$\frac{1}{\omega_0^{\;2}}\times\left(-\omega_0\right)\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)\times\left(-\omega_0\right)\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$=\frac{\cancel{\omega_0^{\;2}}}{\cancel{\omega_0^{\;2}}}\times\left[z^2+\cancel{z\sqrt{z^2-1}}-\cancel{z\sqrt{z^2-1}}-\left(\sqrt{z^2-1}\right)^2\right]=\cancel{z^2}-\cancel{z^2}+1=\mathbf{1}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{S(p)=\frac{K\,A}{p\times\left(1-\frac{p}{p_1}\right)\times\left(1-\frac{p}{p_2}\right)}}$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(1 - \dfrac{p}{p_1}\right) \times \left(1 - \dfrac{p}{p_2}\right)}$$

Posons : $\tau_1 = -\dfrac{1}{p_1}$ ***et*** $\tau_2 = -\dfrac{1}{p_2}$

$$\boxed{S(p) = \frac{K\,A}{p \times (1 + \tau_1\, p) \times (1 + \tau_2\, p)}}$$

Faisons une décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + \tau_1\, p} + \frac{\gamma}{1 + \tau_2\, p}$$

$$S(p)=\frac{K\,A}{p\times(1+\tau_1\,p)\times(1+\tau_2\,p)}$$

$$S(p)=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{1+\tau_1\,p}+\frac{\gamma}{1+\tau_2\,p}$$

$$S(p)=\frac{\alpha(1+\tau_1\,p)(1+\tau_2\,p)+\beta\,p(1+\tau_2\,p)+\gamma\,p(1+\tau_1\,p)}{p\times(1+\tau_1\,p)\times(1+\tau_2\,p)}$$

$$=\frac{\alpha+p\times(\alpha\tau_1+\alpha\tau_2+\beta+\gamma)+p^2\times(\alpha\tau_1\tau_2+\beta\tau_2+\gamma\tau_1)}{p\times(1+\tau_1\,p)\times(1+\tau_2\,p)}$$

Numérateur :

$$\alpha+p\times(\alpha\tau_1+\alpha\tau_2+\beta+\gamma)+p^2\times(\alpha\tau_1\tau_2+\beta\tau_2+\gamma\tau_1)=K\,A$$

$$\begin{cases}\boxed{\alpha=K\,A}\\ \alpha\tau_1+\alpha\tau_2+\beta+\gamma=0\Rightarrow\beta+\gamma=-\alpha(\tau_1+\tau_2)=-K\,A(\tau_1+\tau_2)\\ \alpha\tau_1\tau_2+\beta\tau_2+\gamma\tau_1=0\Rightarrow\beta\tau_2+\gamma\tau_1=-\alpha\tau_1\tau_2=-K\,A\tau_1\tau_2\end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = K\,A \\ \beta + \gamma = -K\,A(\tau_1 + \tau_2) \\ \beta\tau_2 + \gamma\tau_1 = -K\,A\tau_1\tau_2 \end{cases}$$

1

2

Faisons : $\tau_2 \times$ 1 $-$ 2 $\Rightarrow \gamma(\tau_2 - \tau_1) = K\,A\left(-\cancel{\tau_1\tau_2} - \tau_2^{\,2} + \cancel{\tau_1\tau_2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = -K\,A \times \frac{\tau_2^{\,2}}{\tau_2 - \tau_1}}$$

L'équation 1 *donne alors :*

$$\boxed{\beta = -K\,A(\tau_1 + \tau_2) + K\,A \times \frac{\tau_2^{\,2}}{\tau_2 - \tau_1}}$$

$$\boxed{\beta = -K\,A\left(\tau_1+\tau_2\right) + K\,A \times \frac{\tau_2{}^2}{\tau_2-\tau_1}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = K\,A \times \frac{-(\tau_1+\tau_2)\times(\tau_2-\tau_1)}{\tau_2-\tau_1} + K\,A \times \frac{\tau_2{}^2}{\tau_2-\tau_1}$$

$$= K\,A \times \frac{-\cancel{\tau_1\tau_2} + \tau_1{}^2 - \cancel{\tau_2{}^2} + \cancel{\tau_2\tau_1} + \cancel{\tau_2{}^2}}{\tau_2-\tau_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta = K\,A \times \frac{\tau_1{}^2}{\tau_2-\tau_1}}$$

On a donc la décomposition en éléments simples suivante :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+\tau_1\, p} + \frac{\gamma}{1+\tau_2\, p}$$

$$\alpha = K\,A$$

$$\beta = K\,A \times \frac{\tau_1^{\ 2}}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$\gamma = -K\,A \times \frac{\tau_2^{\ 2}}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = \frac{K\,A}{p} + K\,A \times \frac{\tau_1^{\ \cancel{2}}}{\tau_2 - \tau_1} \times \frac{\frac{1}{\cancel{\tau_1}}}{p + \frac{1}{\tau_1}} - K\,A \times \frac{\tau_2^{\ \cancel{2}}}{\tau_2 - \tau_1} \times \frac{\frac{1}{\cancel{\tau_2}}}{p + \frac{1}{\tau_2}}$$

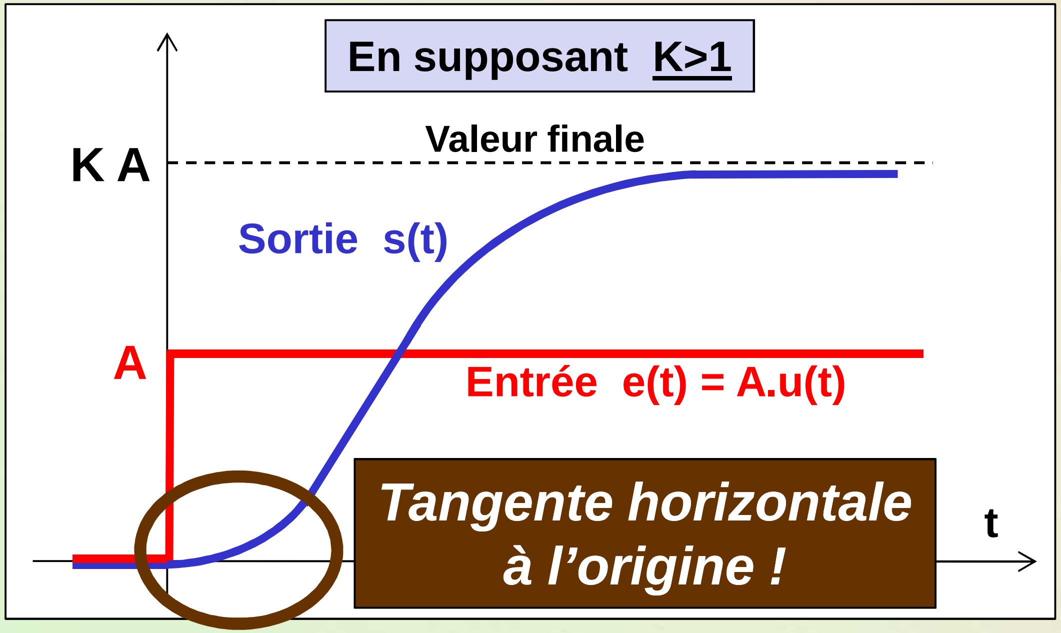
$$\Rightarrow \quad S(p) = K\,A \times \left\{ \frac{1}{p} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \times \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \times \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_2}} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = K\,A \times \left\{ 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \times e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \times e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right\} \times u(t)$$

Représentation graphique de la réponse à un échelon

$z > 1$

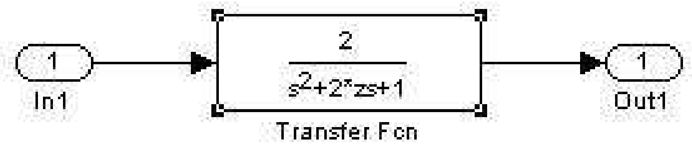
$$s(t) = K\,A \times \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \times e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \times e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \times u(t)$$



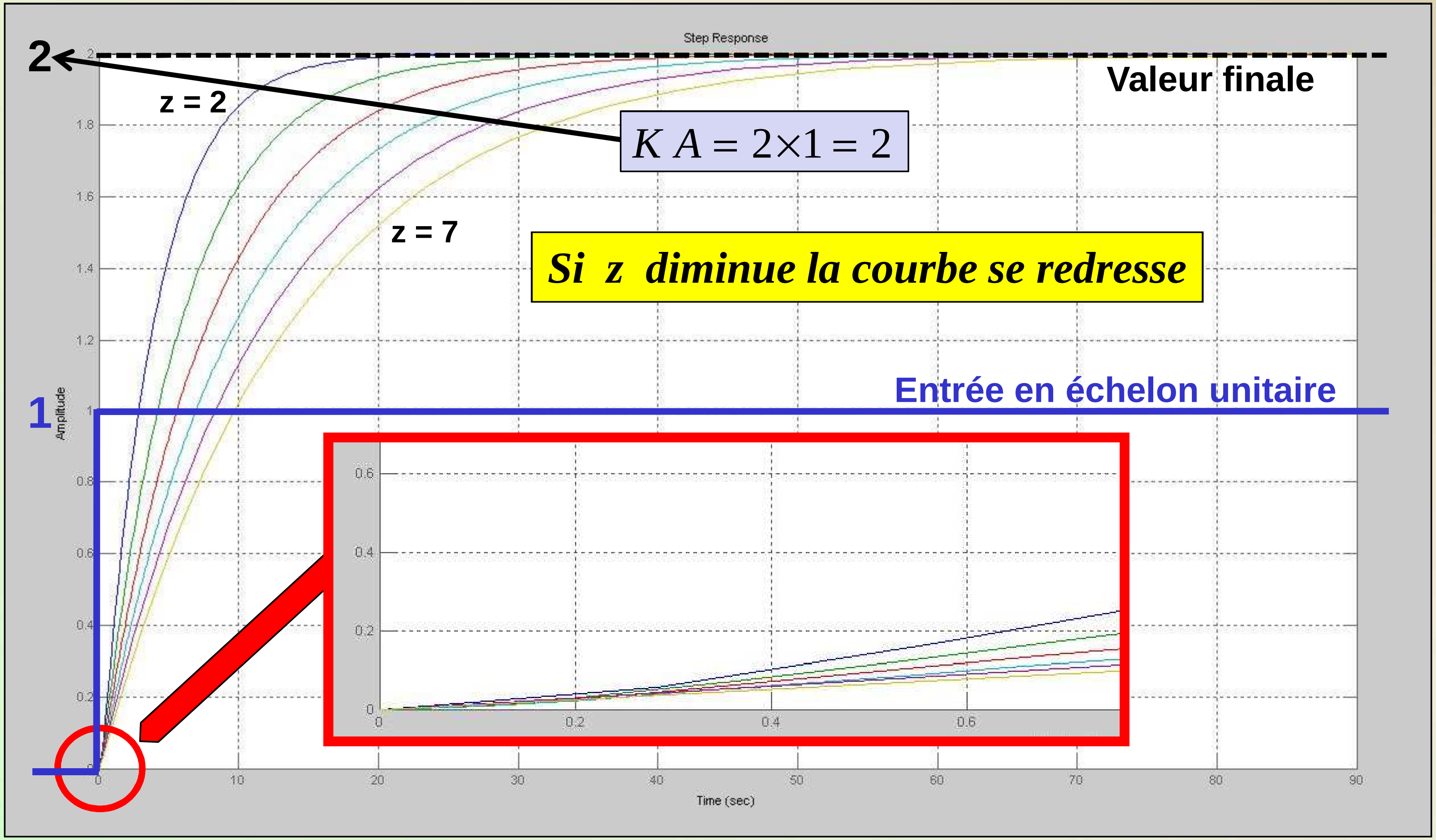
Nota : $\lim_{t \to \infty} s(t) = K\,A \times (1 + 0 - 0) = K\,A$ ⇒ L'erreur statique n'est nulle que si K = 1

Influence du facteur d'amortissement z

Réponse indicielle (échelon de 1)



K = 2 **ω_0 = 1 rad/s**



Calcul de la tangente à l'origine

z > 1

$$s(t) = K\,A \times \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \times e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \times e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \times u(t)$$

$$\Rightarrow\quad s'(t) = K\,A \times \left(0 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \times \left(\frac{-1}{\tau_1} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \times \left(\frac{-1}{\tau_2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

D'où à l'origine (t = 0):

$$s'(t=0) = K\,A \times \left(\frac{\cancel{\tau_1}}{\tau_2 - \tau_1} \times \left(\frac{-1}{\cancel{\tau_1}} \right) \times 1 - \frac{\cancel{\tau_2}}{\tau_2 - \tau_1} \times \left(\frac{-1}{\cancel{\tau_2}} \right) \times 1 \right)$$

$$= K\,A \times \left(-\cancel{\frac{1}{\tau_2 - \tau_1}} + \cancel{\frac{1}{\tau_2 - \tau_1}} \right) = \mathbf{0}$$

FIN DE LA PREMIERE PARTIE

4-2) Deuxième cas :

$z = 1$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2\,z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}$$

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2 - 1 \right)$$

Système apériodique critique ou critique

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2 \times 1}{\omega_0} \times p + 1 \right)} = \frac{K\,A}{p \times \left(1 + \frac{p}{\omega_0} \right)^2}$$

On a un pôle double : $p_{12} = -\omega_0$ ***posons :*** $\tau_{12} = -\frac{1}{p_{12}} = \frac{1}{\omega_0}$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(1 + \tau_{12}\, p \right)^2}$$

$$\boxed{S(p) = \frac{K\,A}{p \times (1+\tau_{12}\,p)^2}}$$

Décomposons en éléments simples : $S(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta\,p+\gamma}{(1+\tau_{12}\,p)^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = K\,A \\ \beta = -K\,A\tau_{12}{}^2 \\ \gamma = -2\,K\,A\tau_{12} \end{cases}$$

On en déduit :

$$S(p) = KA \times \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_{12}{}^2\,p + 2\,\tau_{12}}{(1+\tau_{12}\,p)^2} \right) = KA \times \left(\frac{1}{p} - \tau_{12} \times \frac{\tau_{12}\,p+1+1}{(1+\tau_{12}\,p)^2} \right)$$

$$= KA \times \left(\frac{1}{p} - \tau_{12} \times \frac{\cancel{\tau_{12}\,p+1}}{(1+\tau_{12}\,p)^{\cancel{2}}} - \tau_{12} \times \frac{1}{(1+\tau_{12}\,p)^2} \right)$$

$$KA\times\left(\frac{1}{p}-\tau_{12}\times\frac{1}{(1+\tau_{12}\,p)}-\tau_{12}\times\frac{1}{(1+\tau_{12}\,p)^2}\right)$$

$$=KA\times\left[\boxed{\frac{1}{p}}-\cancel{\tau_{12}}\times\frac{1}{\cancel{\tau_{12}}}\times\boxed{\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_{12}}}}-\cancel{\tau_{12}}\times\frac{1}{(\tau_{12})^{\cancel{2}}}\times\boxed{\frac{1}{\left(p+\frac{1}{\tau_{12}}\right)^2}}\right]$$

Échelon unitaire

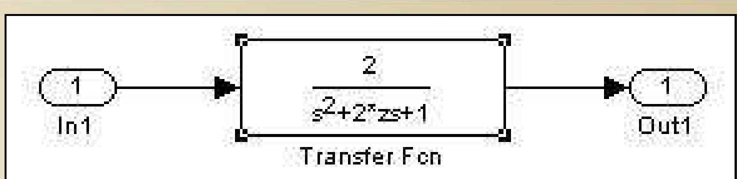
$$"\frac{1}{p+a}"$$

$$"\frac{1}{(p+a)^2}"$$

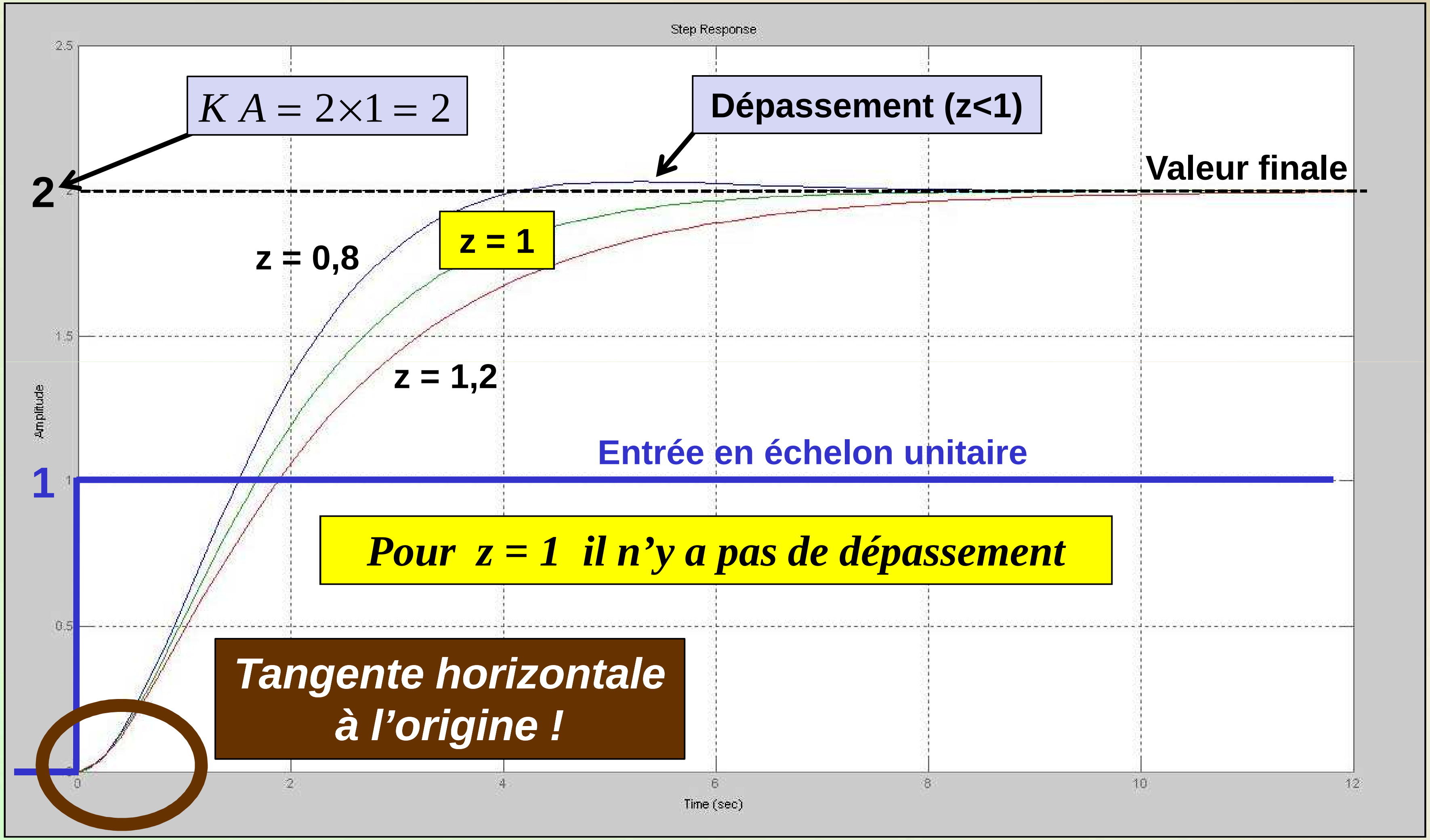
D'où dans le domaine temporel : $s(t)=K\,A\times\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_{12}}}-\frac{1}{\tau_{12}}\times t\,e^{-\frac{t}{\tau_{12}}}\right)\times u(t)$

Représentation graphique de la réponse indicielle

$z = 1$



$K = 2 \qquad \omega_0 = 1$ rad/s



4-3) Troisième cas :

$z < 1$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2\,z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}$$

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2 - 1 \right)$$

Système oscillant ou sous-amorti ou pseudopériodique

Mettons le dénominateur sous la forme : $p \times \left((p+a)^2 + \omega^2 \right)$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \frac{1}{\omega_0^2} \times \left(p^2 + 2\,z\,\omega_0 \times p + \omega_0^2 \right)} = \frac{K\,A\,\omega_0^2}{p \times (p^2 + 2\,z\,\omega_0 \times p + \omega_0^2)}$$

$$= \frac{K\,A\,\omega_0^2}{p \times [\underbrace{(p + z\,\omega_0)^2}_{p^2 + 2z\,\omega_0 + (z\omega_0)^2} + \omega_0^2 - z^2 \omega_0^2\,]} = \boxed{\frac{K\,A\,\omega_0^2}{p \times [(p + z\,\omega_0)^2 + \omega_0^2 \times (1 - z^2)\,]}}$$

$$S(p) = \frac{K\,A\,\omega_0^{\,2}}{p\times[(p+\boxed{z\,\omega_0})^2+\boxed{\omega_0^{\,2}\times(1-z^2)}]}$$

$$\boxed{z\,\omega_0} \rightarrow a \qquad \boxed{\omega_0^{\,2}\times(1-z^2)} \rightarrow \omega^2$$

Faisons une décomposition en éléments simples de la forme :

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta\,p+\gamma}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha\times[(p+a)^2+\omega^2]+\beta\,p^2+\gamma\,p}{p\times[(p+a)^2+\omega^2]}$$

$$= \frac{\alpha\,p^2+2\alpha\,p\,a+\alpha\,a^2+\alpha\,\omega^2+\beta\,p^2+\gamma\,p}{p\times[(p+a)^2+\omega^2]}$$

$$= \frac{\alpha\times(a^2+\omega^2)+p\times(2\alpha\,a+\gamma)+p^2\times(\alpha+\beta)}{p\times[(p+a)^2+\omega^2]}$$

$$\frac{K A\omega_0^2}{p\times[(p+a)^2+\omega^2]} = \frac{\alpha\times(a^2+\omega^2)+p\times(2\alpha a+\gamma)+p^2\times(\alpha+\beta)}{p\times[(p+a)^2+\omega^2]}$$

$$\boxed{a = z\,\omega_0} \qquad \boxed{\omega^2 = \omega_0^2\times(1-z^2)}$$

$$(z\,\omega_0)^2+\omega_0^2\times(1-z^2) = \cancel{z^2\omega_0^2}+\omega_0^2-\cancel{z^2\omega_0^2} = \omega_0^2$$

$$\begin{cases} \alpha\times\boxed{(a^2+\omega^2)} = K A\omega_0^2 \Rightarrow \alpha\times\cancel{\omega_0^2} = K A\cancel{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = K A} \\ 2\alpha a+\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -2\alpha a \Rightarrow \boxed{\gamma = -2KAz\,\omega_0} \\ \alpha+\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow \boxed{\beta = -KA} \end{cases}$$

$$S(p) = \frac{K\,A\,\omega_0^{\,2}}{p\times[(p+z\,\omega_0)^2+\omega_0^{\,2}\times(1-z^2)]} = \frac{\alpha}{p}+\frac{\beta\,p+\gamma}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$\alpha = K\,A \qquad \beta = -K\,A \qquad \gamma = -2\,K\,A\,z\,\omega_0$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p} - \frac{K\,A\,p + 2\,K\,A\,z\,\omega_0}{(p+z\,\omega_0)^2+\omega_0^{\,2}\times(1-z^2)}$$

$$= K\,A\times\left(\frac{1}{p} - \frac{p+2\,z\,\omega_0}{(p+z\,\omega_0)^2+\omega_0^{\,2}\times(1-z^2)}\right)$$

$$= K\,A\times\left(\frac{1}{p} - \frac{p+z\,\omega_0}{(p+z\,\omega_0)^2+\omega_0^{\,2}\times(1-z^2)} - \frac{z\,\omega_0}{(p+z\,\omega_0)^2+\omega_0^{\,2}\times(1-z^2)}\right)$$

$$S(p) = KA \times \left(\frac{1}{p} - \frac{p + z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + \omega_0^{\,2} \times (1 - z^2)} - \boxed{\frac{z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + \omega_0^{\,2} \times (1 - z^2)}} \right)$$

$$a = z\omega_0$$

$$\omega^2 = \omega_0^{\,2} \times (1 - z^2)$$

$$\frac{z\omega_0}{\sqrt{\omega_0^{\,2} \times (1 - z^2)}} \times \frac{\sqrt{\omega_0^{\,2} \times (1 - z^2)}}{(p + z\omega_0)^2 + \omega_0^{\,2} \times (1 - z^2)}$$

$$S(p) = K\,A \times \left(\frac{1}{p} - \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2} - \frac{z\cancel{\omega_0}}{\cancel{\omega_0} \times \sqrt{1 - z^2}} \times \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2} \right)$$

$$S(p) = K\,A \times \left(\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \times \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \right)$$

$$a = z\,\omega_0$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 \times (1-z^2)} = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$$

Utilisons les résultats suivants :

$$e^{-at} \times \cos(\omega t) \rightsquigarrow \mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-at} \times \sin(\omega t) \rightsquigarrow \mathcal{L}[\,f(t)] = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

D'où au final :

$$s(t) = K\,A \times \left(1 - e^{-z\,\omega_0\,t} \times \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-z^2} \times t\right) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \times e^{-z\,\omega_0\,t} \times \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-z^2} \times t\right) \right)$$

$$s(t) = K\,A \times \left(1 - e^{-z\omega_0 t} \times \cos\left(\omega_0\sqrt{1-z^2} \times t\right) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \times e^{-z\omega_0 t} \times \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2} \times t\right)\right)$$

On peut « simplifier » cette équation en faisant le changement de variable suivant :

$$\sin\varphi = \sqrt{1-z^2} \qquad \cos\varphi = z$$

$$s(t) = K\,A \times \left\{1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}} \times \left[\sqrt{1-z^2} \times \cos\left(\omega_0\sqrt{1-z^2} \times t\right) + z \times \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2} \times t\right)\right]\right\}$$

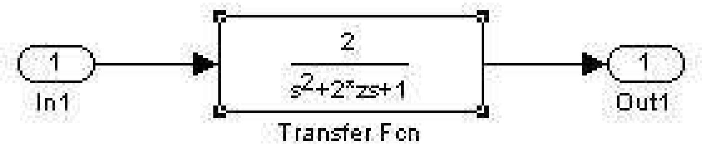
$$\Rightarrow s(t) = K\,A \times \left\{1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}} \times \left[\sin\varphi \times \cos\left(\omega_0\sqrt{1-z^2} \times t\right) + \cos\varphi \times \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2} \times t\right)\right]\right\}$$

Utilisons : $"\sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b = \sin(a+b)"$

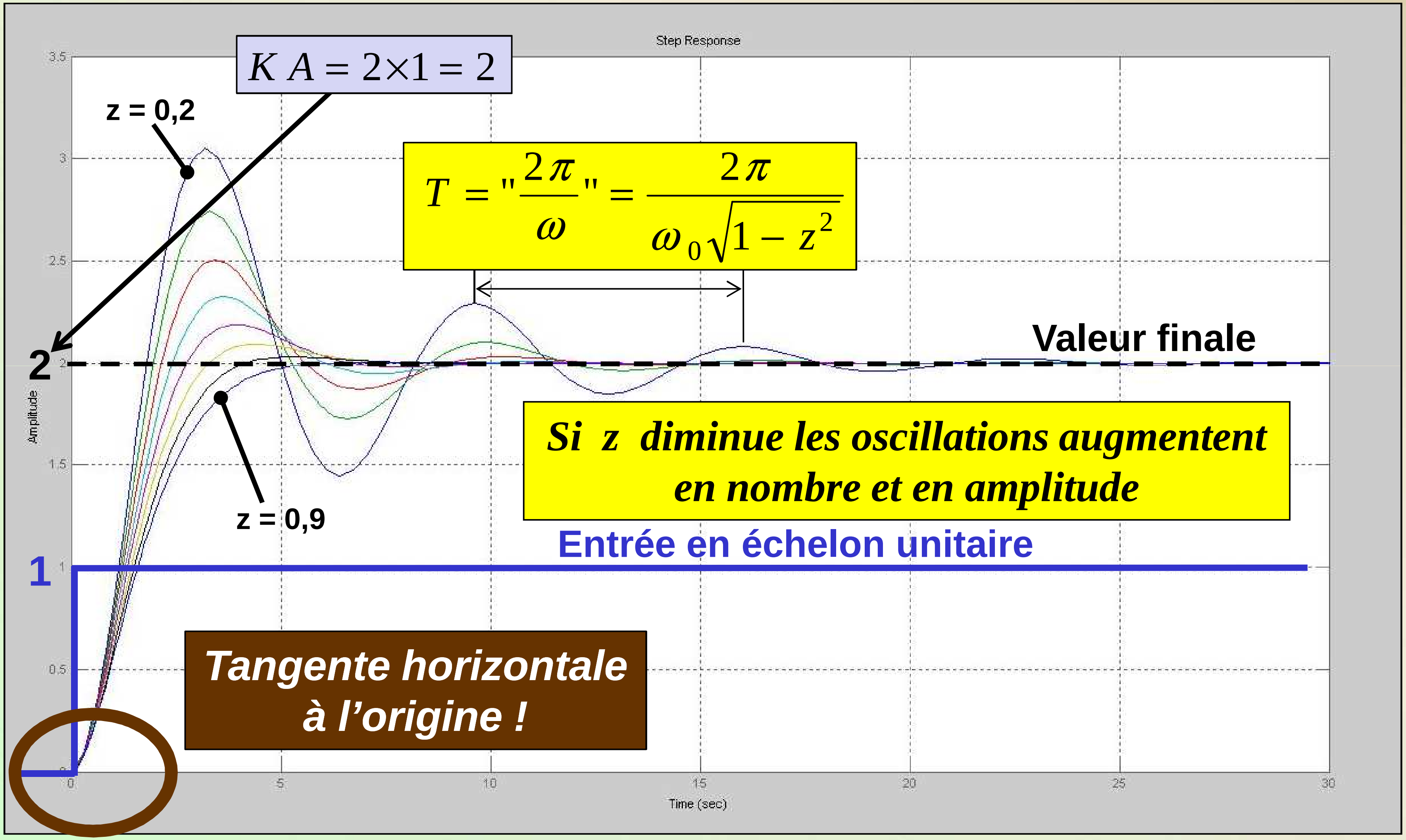
$$\Rightarrow \boxed{s(t) = K\,A \times \left\{1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}} \times \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2} \times t + \varphi\right)\right\}}$$

Représentation graphique de la réponse indicielle

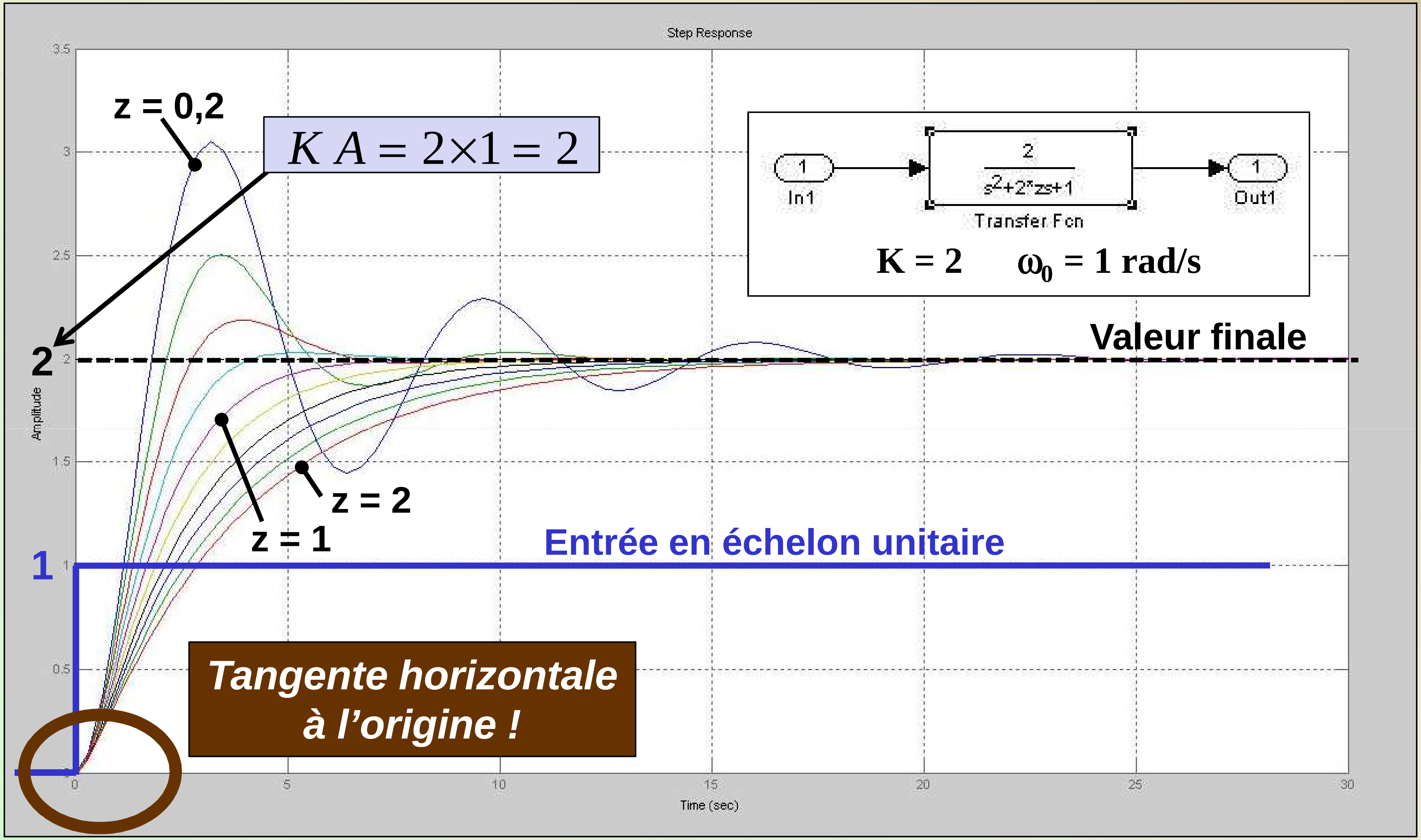
$z < 1$



K = 2 ω_0 = 1 rad/s



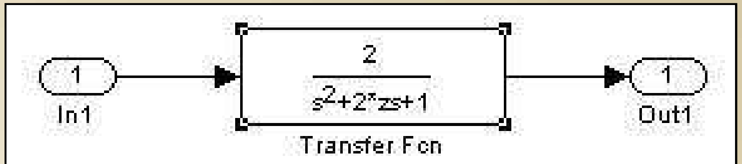
Récapitulatif



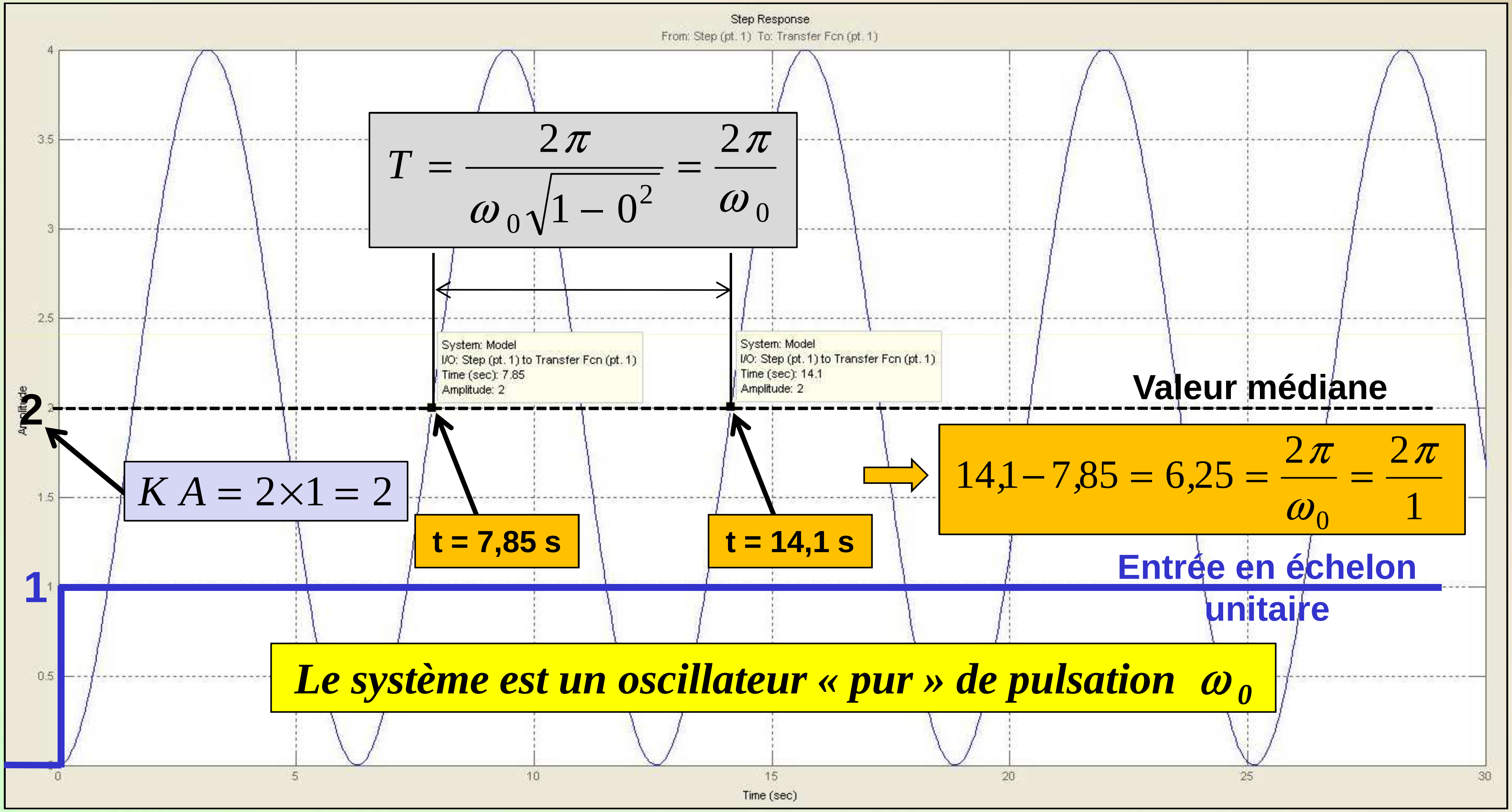
Cas particulier

Système non amorti

z = 0



K = 2 **ω_0 = 1 rad/s**



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-0^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

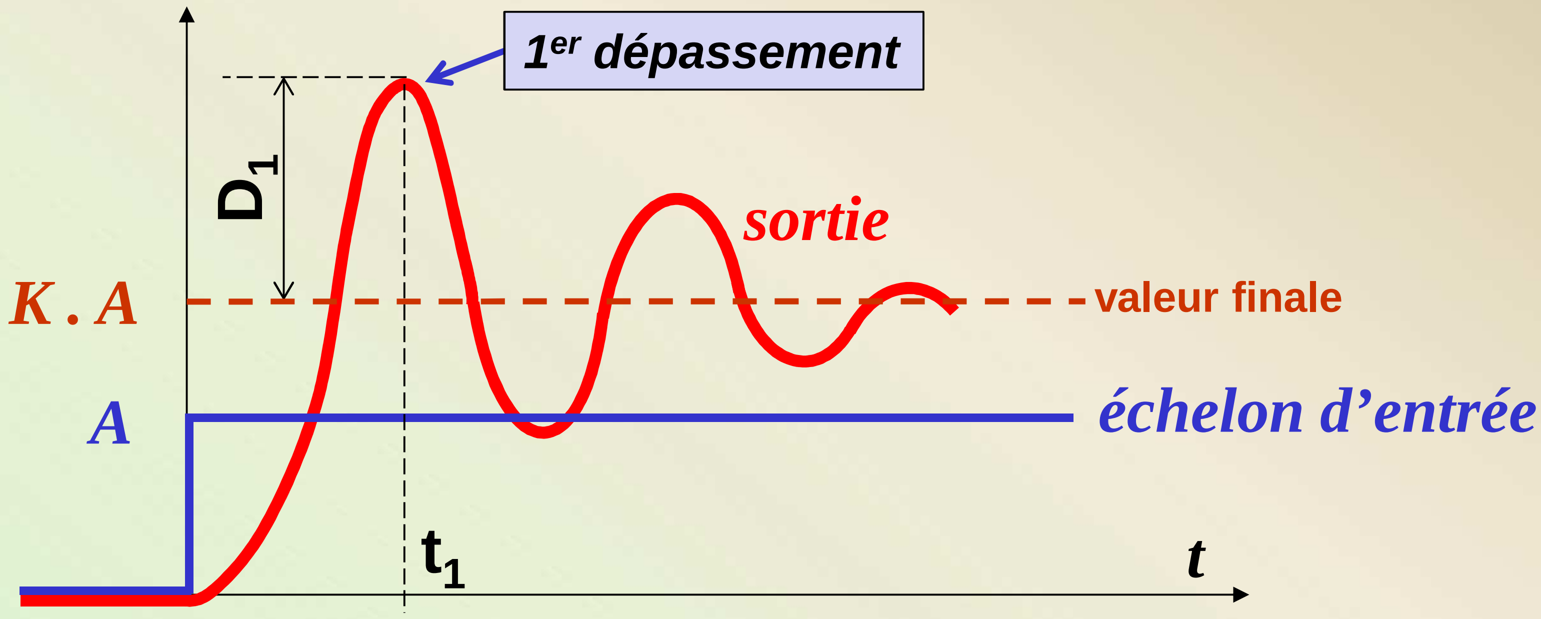
$$K\,A = 2 \times 1 = 2$$

$$14{,}1 - 7{,}85 = 6{,}25 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1}$$

Le système est un oscillateur « pur » de pulsation ω_0

5) Identification d'un deuxième ordre oscillant (z<1)

On peut déterminer les valeurs numériques de la fonction de transfert d'un deuxième ordre à partir de sa réponse à un échelon :

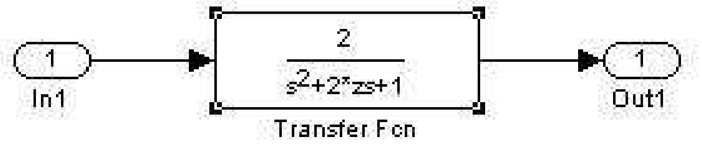


Pseudo-période

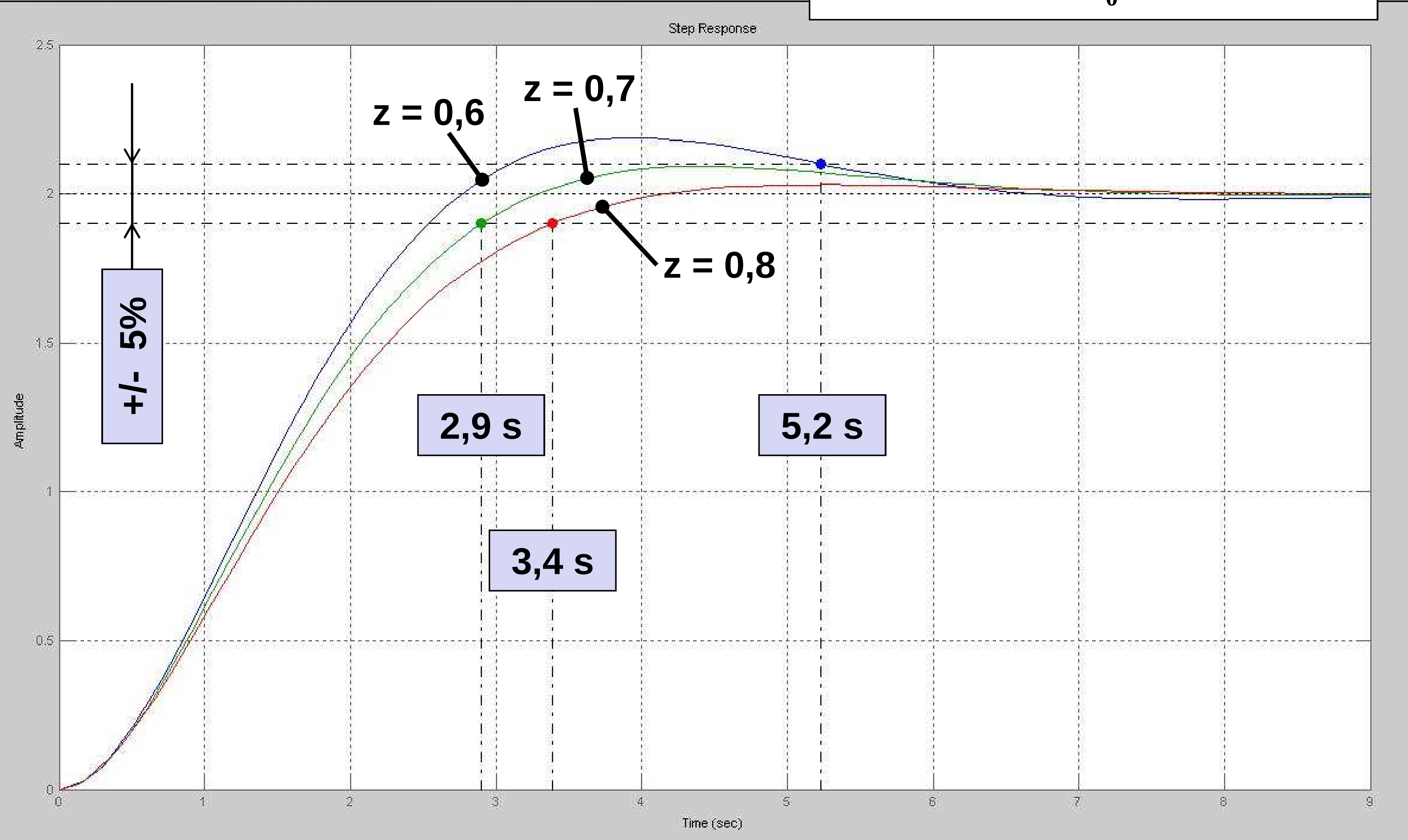
$$D_1 = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$t_1 = \frac{T_a}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

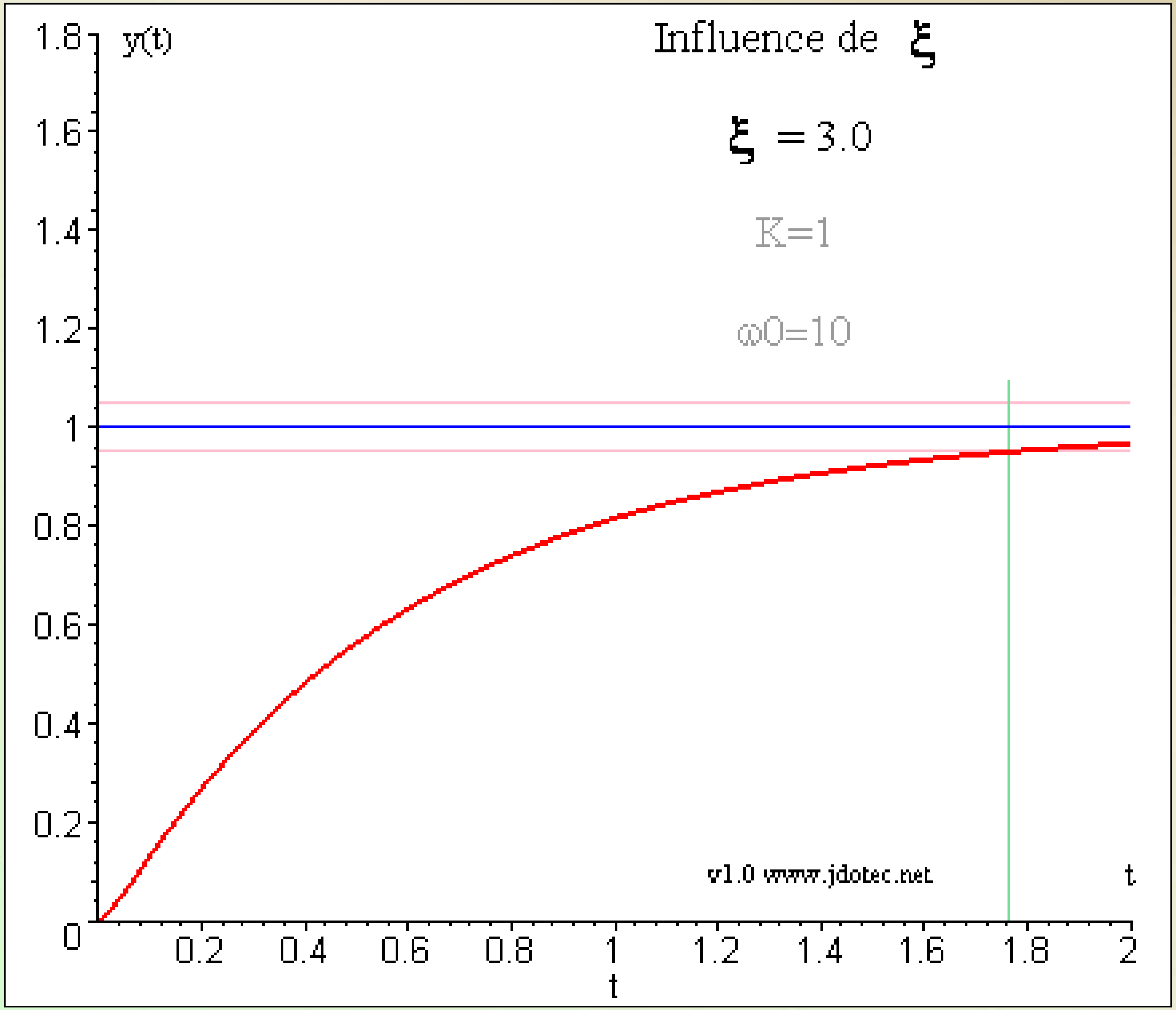
6) Rapidité: *temps de réponse minimal*



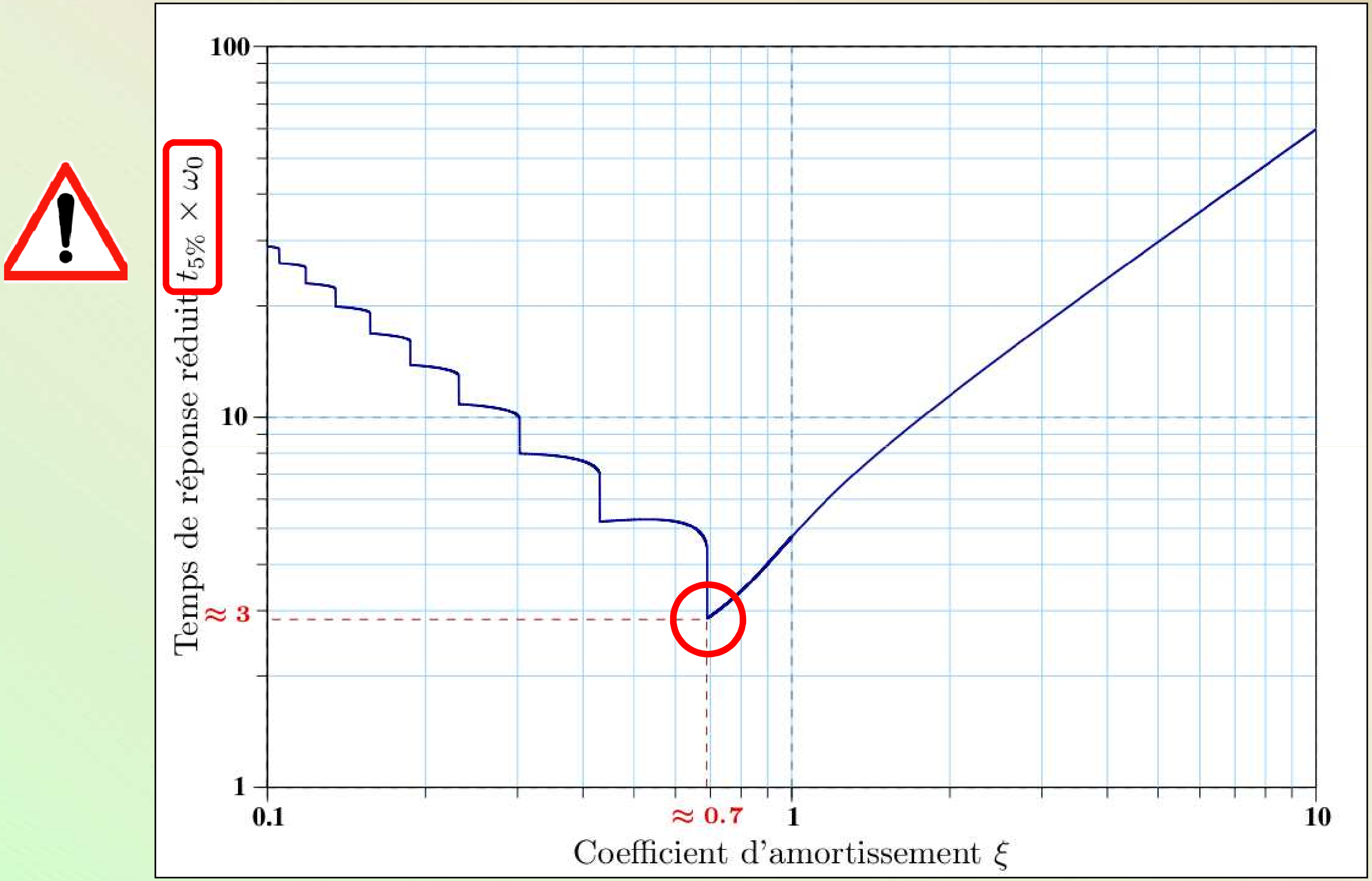
K = 2 ω_0 = 1 rad/s



Influence de la diminution du facteur d'amortissement



Abaque des temps de réponse réduits



FIN