INTRODUCTION CINEMATIQUE

GEOMETRIE VECTORIELLE

1) Vecteur, vecteur libre, vecteur lié

2) Norme d'un vecteur

3) Opérations sur les vecteurs

1) Vecteur, vecteur libre, vecteur lié

Un vecteur (libre ou lié) est un élément de l'espace vectoriel R^3

il peut être défini de manière unique par 3 grandeurs (composantes) dans une base donnée de cet espace vectoriel R^3

un vecteur <u>libre</u> n'est attaché à aucun point de l'espace.
un vecteur <u>lié</u> est attaché à un point de l'espace.

On utilisera les trois notions suivantes :

- ***<u>base :</u>*** trois vecteurs orthonormés.
- ***<u>repère :</u>*** base associée à un point (le centre du repère).
- ***<u>une pièce du système :</u>*** sous entendu la base associée à cette pièce.

Ces trois notions seront souvent « mélangées » dans nos sujets et utilisées un peu à tort et à travers…

Exemple : **soit la base** $B_0(\vec{x}_0\,,\vec{y}_0\,,\vec{z}_0)$

On écrira un vecteur $\overrightarrow{AB}$ ***de composantes (a, b, c) de la façon suivante :***

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0}$$

En ligne

Autre notation :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0\ \vec{y}_0\ \vec{z}_0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{B_0}}$$

En colonne

Toujours bien préciser la base d'écriture !

2) Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $B_0(\vec{x}_0\,,\vec{y}_0\,,\vec{z}_0)$ ***on définit la norme d'un vecteur la grandeur <u>positive</u> :***

$$\overrightarrow{AB} = a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Le résultat est indépendant de la base d'écriture.

Une base est dite orthonormée quand :

$\Rightarrow$ ***les vecteurs la composant sont orthogonaux entre eux.***
la norme de chacun de ses vecteurs vaut 1 (vecteurs unitaires).

3) Opérations sur les vecteurs

Somme de vecteurs :

Soient deux vecteurs exprimés dans la même base B_0 :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}_{B_0} \qquad \vec{V} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}_{B_0}$$

$$\vec{U} + \vec{V} = (a_1 + a_2)\vec{x}_0 + (b_1 + b_2)\vec{y}_0 + (c_1 + c_2)\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}_{B_0}$$

Nota : $\left\| \vec{U} + \vec{V} \right\| \neq \left\| \vec{U} \right\| + \left\| \vec{V} \right\|$

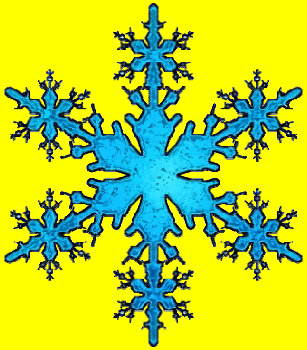
$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2} \neq \sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}} + \sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2} + c_2^{\ 2}}$$

Multiplication par un scalaire :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{B_0}$$

$$\alpha \times \overrightarrow{AB} = \alpha \times \left(a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0 \right) = \alpha\, a\,\vec{x}_0 + \alpha\, b\,\vec{y}_0 + \alpha\, c\,\vec{z}_0$$

$$= \alpha \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{B_0} = \begin{bmatrix} \alpha\, a \\ \alpha\, b \\ \alpha\, c \end{bmatrix}_{B_0}$$



Nota : $\left\| \alpha \times \overrightarrow{U} \right\| = \alpha \times \left\| \overrightarrow{U} \right\|$ ***(uniquement si α est positif ou nul)***

Produit scalaire :

C'est « l'outil » pour projeter un vecteur dans une base (projection vectorielle).

Le produit scalaire de deux vecteurs vaut :

$$\boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V} = \left\|\vec{U}\right\| \times \left\|\vec{V}\right\| \times \cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)}$$

Le résultat d'un produit scalaire est un <u>réel</u>.

Autre expression si les deux vecteurs sont écrits dans la même base :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}_{B_i} \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}_{B_i} \Rightarrow \boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V} = a_1 \times a_2 + b_1 \times b_2 + c_1 \times c_2}$$

Le résultat est indépendant de la base d'écriture (<u>identique aux deux vecteurs</u>).

Propriétés du produit scalaire :

▶ **Distributivité par rapport à l'addition :**

$$\boxed{\vec{U}\,.\left(\vec{V}+\vec{W}\right)=\vec{U}\,.\,\vec{V}+\vec{U}\,.\,\vec{W}}$$

▶ **Symétrie :** $\boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V}=\vec{V}\,.\,\vec{U}}$

Le cos est alors nul

▶ **Nullité :** *le résultat d'un produit scalaire est un nul si :*

l'un des deux vecteurs est nul ***ou*** *s'ils sont orthogonaux.*

▶ **Signe du produit scalaire :** $\vec{U}\,.\,\vec{V}>0$ *si* $\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

Pour que le cos soit ***> 0***

Cas d'un vecteur de norme unitaire :

Si $\left\|\overrightarrow{V}\right\| = 1$ **alors** $\overrightarrow{U} \,.\, \overrightarrow{V}$ **correspond à la projection en valeur algébrique de** $\overrightarrow{U}$ **sur** $\overrightarrow{V}$

Cas d'une base orthonormée directe :

Si $B_0\left(\vec{x}_0\,,\vec{y}_0\,,\vec{z}_0\right)$ ***est une base orthonormée directe alors :***

- $\overrightarrow{U} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0\ \vec{y}_0\ \vec{z}_0)}$ $\quad \overrightarrow{U} = a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{U}.\,\vec{x}_0 = a \\ \overrightarrow{U}.\,\vec{y}_0 = b \\ \overrightarrow{U}.\,\vec{z}_0 = c \end{cases}$
- $\vec{x}_0.\vec{x}_0 = 1 \qquad \vec{y}_0.\vec{y}_0 = 1 \qquad \vec{z}_0.\vec{z}_0 = 1$
- $\vec{x}_0.\vec{y}_0 = 0 \qquad \vec{y}_0.\vec{z}_0 = 0 \qquad \vec{x}_0.\vec{z}_0 = 0$

Ce qu'il faut avoir retenu
(minimum « vital »…)

- Les deux façons d'écrire un vecteur (en ligne ou en colonne).
- Si écriture en colonne ***toujours*** préciser la base d'écriture.
- Utiliser indifféremment la notion de base, de repère ou de pièce du mécanisme.
- Savoir calculer la norme d'un vecteur.
- Savoir ajouter des vecteurs et les multiplier par un scalaire.
- Savoir calculer un produit scalaire à partir des normes de chaque vecteur ou de leurs composantes.
- Savoir que le produit scalaire sert à projeter un vecteur dans une base (projection vectorielle).

Le produit vectoriel de deux vecteurs sera vu en cours.