LE TORSEUR CINEMATIQUE

1) Définition

Un torseur est un outil mathématique constitué de l'association de deux champs vectoriels :

- ***le premier champ, appelé résultante du torseur, noté $\overrightarrow{R}$, est un champ constant.***

- ***le deuxième champ, appelé moment du torseur, noté $\overrightarrow{M_A}$, est un champ variable tel que la relation suivante est vérifiée :***

$$\boxed{\forall (A\ B) \qquad \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R}}$$

(formule de changement de point)

Nota : ***si un champ de vecteur vérifie la formule de changement de point alors on peut mettre en place l'outil torseur.***

2) Notation

$$\{T\}_A = \left\{ \vec{R} \quad \overrightarrow{M_A} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix} \right\}_A$$

- $\vec{R}$ ***et*** $\overrightarrow{M_A}$ ***sont appelés les éléments de réduction du torseur en A.***

- ***Si on écrit les composantes des vecteurs il faut alors préciser la base d'écriture :***

$$\{T\}_A = \left\{ \begin{array}{|l|l} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{array} \right\}_{A,\, \mathcal{B}_1}$$

3) Opérations sur les torseurs

Egalité :

Deux torseurs sont égaux si :

- *leur résultante est identique.*
- *il existe un point où leur moment est identique.*
  (les moments seront alors égaux en tout point).

Addition :

La somme de deux torseurs est un torseur :

$$\left\{ T_1 \right\}_A = \left\{ \vec{R_1} \quad \overrightarrow{M_{1A}} \right\}_A \qquad \left\{ T_2 \right\}_A = \left\{ \vec{R_2} \quad \overrightarrow{M_{2A}} \right\}_A$$

$$\boxed{\left\{ T_1 \right\}_A + \left\{ T_2 \right\}_A = \left\{ \vec{R_1} + \vec{R_2} \quad \overrightarrow{M_{1A}} + \overrightarrow{M_{2A}} \right\}_A}$$

Nota : ***les trois torseurs sont écrits au même point A.***

Multiplication par un scalaire :

$$k \times \{T_1\}_A = \left\{ \begin{matrix} k \times \overrightarrow{R_1} & k \times \overrightarrow{M_{1A}} \end{matrix} \right\}_A$$

Comoment de deux torseurs :

$$\{T_1\}_A \otimes \{T_2\}_A = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_1} & \overrightarrow{M_{1A}} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_2} & \overrightarrow{M_{2A}} \end{matrix} \right\}_A$$

$$= \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_{2A}} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_{1A}}$$

Nota : *le résultat est un scalaire indépendant du point d'écriture A.*

$$\{T_1\}_A \otimes \{T_2\}_A = \vec{R_1} \,.\, \overrightarrow{M_{2A}} + \vec{R_2} \,.\, \overrightarrow{M_{1A}}$$

Si calcul en B

$$\left\{ \vec{R}_1 \,;\, \overrightarrow{M_1(B)} \right\}_B \otimes \left\{ \vec{R}_2 \,;\, \overrightarrow{M_2(B)} \right\}_B = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{M_2(B)} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{M_1(B)}$$

$$= \vec{R}_1 \cdot \left(\overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_2 \right) + \vec{R}_2 \cdot \left(\overrightarrow{M_1(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1 \right)$$

$$= \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \cancel{\vec{R}_1 \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_2 \right)} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{M_1(A)} + \boxed{\vec{R}_2 \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1 \right)}$$

$$\cancel{\vec{R}_1 \cdot \left(\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{BA} \right)}$$

$$= \boxed{\vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{M_1(A)}}$$

4) Axe central d'un torseur

Ensemble des points où le moment est colinéaire à la résultante.

Le moment en un point de l'axe central est, en module, le moment minimum du torseur.

➡ ***si en un point le moment est nul alors ce point fait partie de l'axe central.***

5) Le torseur cinématique

Dans le champ des vecteurs vitesse on appelle torseur cinématique le torseur ayant comme éléments de réduction :

$$\{V_{2/1}\}_A = \left\{ \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \quad \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} \right\}_A$$

Formule de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

FIN