LE TORSEUR CINEMATIQUE

1) Définition

Un torseur est un outil mathématique constitué de l'association de deux champs vectoriels :

- ***le premier champ, appelé résultante du torseur, noté $\vec{R}$, est un champ constant.***
- ***le deuxième champ, appelé moment du torseur, noté $\overrightarrow{M_A}$, est un champ variable tel que la relation suivante est vérifiée :***

$$\boxed{\forall (A\ B) \qquad \overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R}}$$

(formule de changement de point)

Nota : ***si un champ de vecteur vérifie la formule de changement de point alors on peut mettre en place l'outil torseur.***

2) Notation

$$\{T\}_A = \left\{\vec{R} \quad \overrightarrow{M_A}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}\vec{R} \\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\}_A$$

- $\vec{R}$ et $\overrightarrow{M_A}$ *sont appelés les éléments de réduction du torseur en A.*

- *Si on écrit les composantes des vecteurs il faut alors préciser la base d'écriture :*

$$\{T\}_A = \left\{\begin{array}{|l|l}R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z\end{array}\right\}_{A,\mathcal{B}_1}$$

3) Opérations sur les torseurs

Egalité :

Deux torseurs sont égaux si :

- *leur résultante est identique.*
- *il existe un point où leur moment est identique.*
  (les moments seront alors égaux en tout point).

Addition :

La somme de deux torseurs est un torseur :

$$\{T_1\}_A = \left\{ \vec{R_1} \quad \overrightarrow{M_{1A}} \right\}_A \qquad \{T_2\}_A = \left\{ \vec{R_2} \quad \overrightarrow{M_{2A}} \right\}_A$$

$$\boxed{\{T_1\}_A + \{T_2\}_A = \left\{ \vec{R_1} + \vec{R_2} \quad \overrightarrow{M_{1A}} + \overrightarrow{M_{2A}} \right\}_A}$$

Nota : ***les trois torseurs sont écrits au même point A.***

Multiplication par un scalaire :

$$k \times \{T_1\}_A = \left\{ k \times \overrightarrow{R_1} \quad k \times \overrightarrow{M_{1A}} \right\}_A$$

Comoment de deux torseurs :

$$\{T_1\}_A \otimes \{T_2\}_A = \left\{ \overrightarrow{R_1} \quad \overrightarrow{M_{1A}} \right\}_A \otimes \left\{ \overrightarrow{R_2} \quad \overrightarrow{M_{2A}} \right\}_A$$

$$= \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_{2A}} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_{1A}}$$

Nota : ***le résultat est un scalaire indépendant du point d'écriture A.***

$$\{T_1\}_A \otimes \{T_2\}_A = \vec{R_1} \cdot \overrightarrow{M_{2A}} + \vec{R_2} \cdot \overrightarrow{M_{1A}}$$

Si calcul en B

$$\left\{ \vec{R}_1 \,;\, \overrightarrow{M_1(B)} \right\}_B \otimes \left\{ \vec{R}_2 \,;\, \overrightarrow{M_2(B)} \right\}_B = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{M_2(B)} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{M_1(B)}$$

$$= \vec{R}_1 \cdot \left(\overrightarrow{M_2(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_2 \right) + \vec{R}_2 \cdot \left(\overrightarrow{M_1(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1 \right)$$

$$= \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \cancel{\vec{R}_1 \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_2 \right)} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{M_1(A)} + \boxed{\vec{R}_2 \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1 \right)}$$

$$\cancel{\vec{R}_1 \cdot \left(\vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{BA} \right)}$$

$$= \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{M_2(A)} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{M_1(A)}$$

4) Axe central d'un torseur

Ensemble des points où le moment est colinéaire à la résultante.

Le moment en un point de l'axe central est, en module, le moment minimum du torseur.

→ *si en un point le moment est nul alors ce point fait partie de l'axe central.*

5) Le torseur cinématique

Dans le champ des vecteurs vitesse on appelle torseur cinématique le torseur ayant comme éléments de réduction :

$$\left\{ V_{2/1} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} & \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} \end{matrix} \right\}_A$$

Formule de changement de point :

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

FIN