Analyse 1
Séries numériques

Ce sont les séries de nombres : à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappels concernant les séries de nombres réels *positifs* :

▶ La nature de la plupart des séries est élucidée en cherchant un équivalent de u_n .

> Si on a obtenu $u_n \sim_{n\infty} n^{-\alpha}$: $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$

▶ Quand on n'a pas d'équivalent, on cherche une inégalité.

> - Domination :
> $u_n \leq v_n$ avec v_n sommable (ie série convergente) prouve que $\sum u_n$ converge.
> - Soumission :
> $u_n \geq v_n$ avec v_n non sommable (ie série divergente) prouve que $\sum u_n$ diverge.

1. Série associée à une suite

Si u est une suite dans $\mathbb{K}$, alors la **série** associée à u est la suite :

$$U : n \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k$$

qui est une " primitive discrète " de u. U est souvent notée abusivement $\sum u_n$.
La suite u peut être récupérée à partir de la série U par " dérivation discrète " :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = U_n - U_{n-1} \ \text{ à condition de poser } \ U_{-1} = 0$$

D'une manière générale toute suite v peut être interprétée comme une série :

$$\forall v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\,,\ v = \sum d_n \ \text{ où } \ d_n = v_n - v_{n-1}$$

En cas de convergence uniquement, on peut définir :

- la **somme** de la série : $S = \lim_{n\infty} U_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$;
- les **restes** : $R_n = S - U_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$; ainsi :

> Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\infty} R_n = 0$.

2. Conditions simples de convergence

2.1 Condition nécessaire

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\infty} u_n = 0$.

Preuve :
En cas de convergence, U_n et U_{n-1} tendent tous deux vers un même nombre S, donc $u_n = U_n - U_{n-1}$ tend vers 0. $\square$

Par contraposition, si la suite u ne converge pas vers 0, alors la série associée diverge : on dit qu'il y a **divergence grossière**.

2.2 Condition suffisante

Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.

On dit alors qu'il y a **convergence absolue**, et que la suite u est **sommable**.

Preuve :

1. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   On décompose la suite u en partie positive et partie négative :
   $$u = v - w \quad \text{où} \quad \forall n \ , \ v_n = \begin{cases} u_n & \text{s'il est positif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ , \ w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \text{ est positif} \\ -u_n & \text{sinon} \end{cases}$$
   Ainsi v et w sont des suites *positives*, et :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n| = v_n + w_n \ \text{ d'où } \ \begin{cases} v_n \leq |u_n| \\ w_n \leq |u_n| \end{cases}$$
   Si $\sum |u_n|$ converge, alors par domination $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent aussi. Ceci signifie que les suites V et W convergent, donc $U = V - W$ converge aussi.

2. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   On décompose la suite u en partie réelle et partie imaginaire :
   $$u = r + ig \quad \text{où} \quad \forall n \ , \ r_n = \Re(u_n) \ , \ g_n = \Im(u_n)$$
   Ainsi r et g sont des suites *réelles*, et :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ r_n^2 \leq r_n^2 + g_n^2 = |u_n|^2 \ \text{ d'où } \ |r_n| \leq |u_n|$$
   et même chose pour g. Si $\sum |u_n|$ converge, alors par domination R et G convergent, puis $U = R + iG$ converge aussi.

$\square$

Une conséquence est la règle de Riemann :

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors u est sommable.

Preuve :
L'hypothèse signifie que u est dominée par la suite de terme général $n^{-\alpha}$. Celle-ci est sommable car $\alpha > 1$, donc u aussi. $\square$

3. Séries géométriques

Une **suite géométrique** est une suite u réelle ou complexe pour laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. En notant q ce rapport, on a alors $u_n = aq^n$ pour tout n, où $a = u_0$. On supposera dans la suite que a est non nul, sinon u et U sont les suites nulles.

L'étude de la série associée est très simple, car dans ce cas on peut expliciter U_n (ce qui est exceptionnel). La célèbre formule :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si} \quad q \neq 1$$

donne en effet :

$$U_n = \begin{cases} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ (n+1)a & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, la série diverge grossièrement. Dans le premier, elle converge ssi q^{n+1} converge, ce qui est le cas ssi $|q| < 1$, auquel cas la limite de U est $\frac{a}{1-q}$.

Une suite géométrique de raison q converge ssi $|q| < 1$, auquel cas sa somme et ses restes sont :

$$S = \frac{u_0}{1-q} = \frac{\text{premier terme}}{1 - \text{raison}} \quad , \quad R_n = \frac{u_{n+1}}{1-q}$$

4. Règle de d'Alembert

Cette règle n'est utilisée que pour les **séries entières**, ie du type :

$$\sum a_n x^n \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{K} \quad \text{est fixé}$$

Ces séries généralisent les séries géométriques : ici la raison est x, et le a n'est plus constant mais variable.

Si $u_n \neq 0$ pour tout n suffisamment grand et $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ a une limite l, alors :

i. cas $l > 1$: $\sum u_n$ diverge grossièrement
ii. cas $l < 1$: $\sum u_n$ converge absolument
iii. cas $l = 1$: on ne peut rien conclure.

Le dernier cas (indéterminé) est le plus courant quand la série n'est pas entière, c'est ce qui explique le domaine d'utilisation.

Preuve :

On pose $v_n = |u_n|$, de sorte que $v_n > 0$ pour tout n suffisamment grand.

1. Cas $l > 1$.
   On fixe $q \in]1, l[$. Comme $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers l :
   $$\exists n_0 \text{ , } \forall n \geq n_0 \text{ , } \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq q$$
   On en déduit par récurrence facile :
   $$\forall n \geq n_0 \text{ , } v_n \geq q^{n-n_0} v_{n_0} = cq^n$$
   où c est une constante > 0 . Comme $q > 1$, cq^n diverge vers $+\infty$ donc il en est de même pour v_n . Ainsi u_n ne tend pas vers 0.

2. Cas $l < 1$.
   On fixe $q \in]l, 1[$. Comme $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers l :
   $$\exists n_0 \text{ , } \forall n \geq n_0 \text{ , } \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq q$$
   d'où comme précédemment :
   $$\forall n \geq n_0 \text{ , } v_n \leq cq^n$$
   Comme $q < 1$, $\sum cq^n$ converge, et par domination il en est de même pour $\sum v_n$. Ainsi $\sum u_n$ converge absolument.

3. Pour $l = 1$, la méthode précédente ne s'applique évidemment pas, et tout peut se passer. Par exemple pour $u_n = n^{-\alpha}$ (non entière) :
   $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} \to 1$$
   et $\sum u_n$ peut être convergente ou divergente.

□

Dans le cas où $u_n = \frac{1}{n!} z^n$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| |z| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$, donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \sum \frac{z^n}{n!} \text{ converge absolument}$$

Ceci permet de définir correctement l'exponentielle complexe (avec comme cas particulier l'exponentielle réelle) :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{cases}$$

Cette définition remplace celle donnée en première année, mais est compatible avec celle-ci comme on le verra.

5. Produit de Cauchy

C'est un produit interne sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui est le $\mathbb{K}$-ev des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si u et v sont deux telles suites, leur **produit de Cauchy** est la suite $w = u * v$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ w_n = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2 | j+k=n} u_j v_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

$u*v$ est une *suite* et non une expression, il est donc hors de question d'écrire $u*v = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k$; et $*$ est un produit sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et non sur $\mathbb{K}$, il est donc hors de question d'écrire $u_n * v_n$.

Dans le cas où u ou v n'est pas définie sur $\mathbb{N}$ mais seulement à partir d'un certain rang, il faut les compléter par des 0 afin de pouvoir définir leur produit de Cauchy.

Exemple :
$u : n \mapsto \frac{1}{n}$, $v : n \mapsto \frac{1}{\ln n}$

u n'est définie que sur $\mathbb{N}^*$, on pose donc $u_0 = 0$.
v n'est définie que sur $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on pose donc $v_0 = v_1 = 0$. Ainsi :

$$(u*v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k = \sum_{k=2}^{n-1} u_{n-k}v_k = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\ln k}$$

car les 2 premiers termes et le dernier sont nuls. Si $n-1 < 2$ ie $n \leq 2$, $(u*v)_n$ est nul car la somme est vide.

L'expression de $u*v$ est rarement explicitable, ie il est rare qu'on arrive à l'exprimer sans $\sum$. On verra cependant quelques exemples où il l'est.

On peut remarquer que le produit de Cauchy apparait naturellement quand on fait le produit de deux polynômes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{p} a_j X^j\right)\left(\sum_{k=0}^{q} b_k X^k\right) &= \sum_{(j,k)\in[0..p]\times[0..q]} a_j b_k X^{j+k} \\ &= \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2|j+k=n} a_j b_k\right) X^n \quad \text{en regroupant} \\ &= \sum_{n=0}^{p+q} (a*b)_n \ X^n \end{aligned}$$

Ce produit a toutes les propriétés habituelles d'un produit : il est interne (clair), associatif, compatible avec $+$ et $\cdot$ (c'est à dire bilinéaire), et admet un neutre qui est la suite des coefficients du polynôme $1_{\mathbb{K}[X]}$ ie $(1,0,0,...)$. Il est en outre commutatif (clair sur la première expression de w_n) , mais non symétrique : la plupart des suites n'ont pas d'inverse. En résumé :

$\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,.,*\right)$ est une algèbre commutative.

Mais la propriété de très loin la plus utile est la compatibilité avec les séries :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum (u*v)_n$ aussi et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u*v)_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$$

Ce théorème est admis.

Exemple :

On fixe un complexe z et on considère $u : n \mapsto z^n$.

1. On commence par étudier $u*u$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (u*u)_n = \sum_{k=0}^{n} z^{n-k}z^k = (n+1)z^n$$

   u est géométrique de raison z, donc sommable ssi $|z|<1$. Dans ce cas, le théorème de Cauchy donne la convergence absolue de $\sum(n+1)z^n$ (qu'on pouvait obtenir directement par d'Alembert), et surtout la formule :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}$$

2. On calcule maintenant $u*u*u$; par associativité de $*$:

$$\begin{aligned}(u*u*u)_n &= \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}(u*u)_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} z^{n-k}.(k+1)z^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) z^n\end{aligned}$$

   On est censé savoir que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$. Vu que $\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (u*u*u)_n = \frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)\,z^n$$

   Si $|z|<1$, alors $\sum u_n$ et $\sum (u*u)_n$ convergent absolument, donc par le théorème de Cauchy :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)^3 = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Le théorème de Cauchy donne aussi la relation fonctionnelle de l'exponentielle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2\,,\ \left\{\begin{array}{l} e^{x+y} = e^x e^y \\ e^x \neq 0 \ \text{ et } \ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}\end{array}\right.$$

Preuve :

1. On définit $u : n \mapsto \frac{x^n}{n!}$, $v : n \mapsto \frac{y^n}{n!}$, avec x et y quelconques fixés.
   On sait déjà que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy. On calcule $w = u * v$:
   $$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k$$
   On reconnait les coefficients binomiaux et la formule du binôme :
   $$w_n = \frac{(x+y)^n}{n!}$$
   Cauchy donne donc :
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \quad \text{ie} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
2. En particulier pour $y = -x$:
   $$e^x e^{-x} = e^0 =_{def} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$
   car seul le premier terme est non nul. Ceci donne $e^x \neq 0$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

$\square$

6. Comparaison série-intégrale

Une fonction f définie, continue et positive sur $[a, +\infty[$, est dite **intégrable** quand sa primitive $F : x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Cette limite est alors notée $\int_a^{+\infty} f$.

Comme f est positive, F et la série $\sum f(n)$ sont *croissantes*, et donc convergent ssi elles sont majorées.

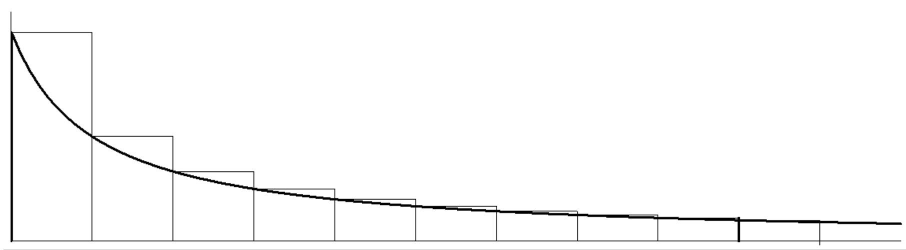
> Si f est une fonction positive, continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, alors :
> i. $\sum f(n)$ converge ssi f est intégrable ;
> ii. dans le cas convergent on a un encadrement des restes :
> $$\forall n \geq a \, , \int_{n+1}^{+\infty} f \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f$$

Preuve :

Elle est basée sur deux interprétations géométriques de U_n . Tout repose sur :

- comme U et F sont croissantes, leur convergence est équivalente à leur majoration ;
- comme f est décroissante, $f(n) \geq f(t) \geq f(n+1)$ pour tout $t \in [\,n, n+1\,]$.

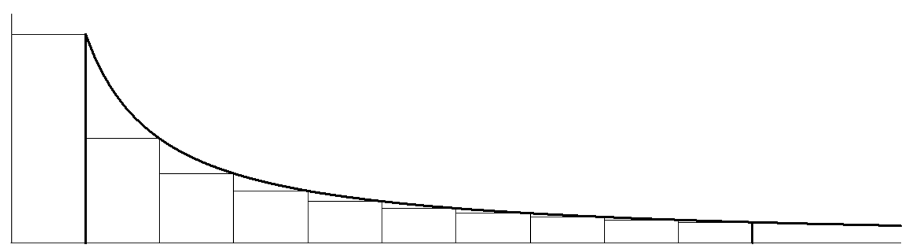
1. $U_n = \sum_{k=a}^{n} f(k).1 =$ somme des aires des rectangles ci-dessous :



Les traits verticaux épais sont en position a, n . Comme f est *décroissante*, les traits horizontaux sont au-dessus du graphe de f, et le dernier trait vertical est à $n+1$, ce qui donne :

$$U_n \geq \int_a^{n+1} f = F(n+1)$$

2. Si on dispose les rectangles à gauche et non à droite :



En éliminant le premier rectangle d'aire $f(a)$ on obtient :

$$U_n - f(a) \leq \int_a^n f = F(n) \quad \text{d'où} \quad F(n+1) \leq U_n \leq f(a) + F(n)$$

3. Si f est intégrable : F est majorée, et l'inégalité de droite montre qu'il en est de même pour U ; comme U est *croissante* on en déduit qu'elle converge.

   Si $\sum f(n)$ converge : U converge donc est majorée, et l'inégalité de gauche montre qu'il en est de même pour F ; comme F est *croissante* on en déduit qu'elle converge.

4. Dans le cas convergent on modifie les graphiques précédents en démarrant à $k = n+1$ et en ne s'arrêtant pas. On obtient alors :

$$\int_{n+1}^{\infty} f \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f$$

□

En appliquant ceci à $f : t \mapsto t^{-\alpha}$, qui est bien positive, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$ pour $\alpha > 0$:

$$F(n) = \int_1^n t^{-\alpha} dt = \begin{cases} \ln n & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

F converge ssi $1-\alpha < 0$, donc $\sum n^{-\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Exemple :
Quelle est la nature de $\sum \frac{1}{n \ln n}$?

D'abord il faut constater que ce n'est en rien évident :

- $\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n}$ mais on ne peut rien conclure car $\sum \frac{1}{n}$ diverge ;
- $\frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ mais on ne peut rien conclure non plus car $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ converge.

On est sauvé par le théorème série intégrale. En effet :

1. $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est positive sur $[2,+\infty[$, évidemment continue, et décroissante sur cet intervalle en tant qu'inverse du produit de 2 fonctions croissantes *positives*. On peut donc appliquer le théorème.

2. L'intégrale de f est calculable en posant $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t}$:

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$$

On voit que F diverge (*très* faiblement), donc il en est de même pour $\sum \frac{1}{n \ln n}$

7. Théorème des séries alternées

Une suite réelle u est dite **alternée** quand 2 termes consécutifs sont toujours de signes opposés. Ainsi en posant $v_n = |u_n|$:

$$u_n = (-1)^n v_n \text{ ou } (-1)^{n-1} v_n \quad \text{suivant le signe de } u_0$$

Si $\sum v_n$ converge on peut tout de suite conclure à la convergence absolue. Sinon on peut essayer le théorème suivant, dit TSSA :

Si u est alternée et $v_n = |u_n|$ décroit vers 0 à partir du rang n_0, alors :

i. $\sum u_n$ converge ;
ii. $\forall n \geq n_0 - 1$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ (premier terme du reste) ;
iii. $\forall n \geq n_0 - 1$, R_n a même signe que son premier terme u_{n+1} .

Preuve :
Dans le cas $u_n = (-1)^n v_n$, l'autre s'en déduisant en raisonnant sur $-u$.

1. On définit les 2 sous-séries d'indices pairs, impairs :

$$A_n = U_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k \quad , \quad B_n = U_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$$

   et on montre qu'elles sont *adjacentes* :

   - $A_{n+1} - A_n = u_{2n+1} + u_{2n+2} = -v_{2n+1} + v_{2n+2}$
     v étant décroissante à partir du rang n_0 :

$$\forall n \geq \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor \ , \ A_{n+1} - A_n \leq 0$$

     donc A est décroissante à partir du rang $p = \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor$.
   - $B_{n+1} - B_n = u_{2n+2} + u_{2n+3} = v_{2n+2} - v_{2n+3}$
     Donc de même B est croissante à partir du rang $p = \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor$.
   - $A_n - B_n = -u_{2n+1} = v_{2n+1} \to_{n\infty} 0$

   On peut donc conclure que A et B convergent vers une limite commune, notée S. Comme tous les termes de la série U sont du type A_n ou B_n , U converge globalement vers S.

2. Compte tenu de ce qui précède :

$$\forall n \geq p \ , \ B_n \leq S \leq A_n \quad \text{ie} \quad U_{2n+1} \leq S \leq U_{2n}$$

   d'où :

$$\forall n \geq p \ , \ U_{2n+1} - U_{2n} \leq S - U_{2n} \leq 0 \quad \text{ie} \quad u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$$

   Ainsi R_{2n} a même signe que u_{2n+1} qui est son premier terme, et $|R_{2n}| \leq |u_{2n+1}|$. C'est le cas pour $2n \geq 2p$ (qui ne fait pas forcément n_0) et donc pour $2n+1 \geq 2p+1 \geq n_0$.

3. On a aussi :

$$\forall n \geq p \ , \ B_n \leq S \leq A_{n+1} \quad \text{ie} \quad U_{2n+1} \leq S \leq U_{2n+2}$$

   d'où :

$$\forall n \geq p \ , \ 0 \leq S - U_{2n+1} \leq U_{2n+2} - U_{2n+1} \quad \text{ie} \quad 0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2}$$

   Ainsi R_{2n+1} a même signe que u_{2n+2} qui est son premier terme, et $|R_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}|$ C'est le cas pour $2n \geq 2p$ et donc pour $2n+2 \geq 2p+2 \geq n_0$.

4. En récapitulant les 2 cas précédents, on voit que quelle que soit la parité de n, les assertions ii et iii du théorème sont vraies.

□

L'hypothèse clé est la *décroissance* de v. Si elle n'est pas évidente, il vaut mieux ne pas utiliser ce théorème mais un DL de u_n .

Exemple :

Quelle est la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$?

1. Il est clair que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais *cet équivalent n'est pas exploitable car n'est pas positif*. Ceci donne aussi $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui permet de conclure qu'il n'y a pas convergence absolue ; mais on ne peut toujours pas conclure sur la nature de la série.

2. On voit facilement que le dénominateur est positif pour $n \geq 2$ (d'ailleurs u_1 n'est pas défini, ce qui oblige à commencer à 2) ; ainsi u est alternée, et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ qui tend bien vers 0. Cependant la décroissance de v n'a rien d'évident, et chercher à la prouver obligerait à calculer et factoriser $v_{n+1}-v_n$: on ne le fait pas.

3. La bonne méthode en pareil cas consiste à faire un DL de u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \left(\tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right] \\ &= \tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{n} + \tfrac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o\left(\tfrac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

   Ainsi par linéarité de la sommation :

$$\sum u_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum \frac{1}{n} + \sum \frac{1}{n^{3/2}} + \sum o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

   On voit que la première série est semi-convergente (par le TSSA), la deuxième divergente, et les 2 suivantes absolument convergentes (exposant > 1). On peut donc conclure que $\sum u_n$ diverge (vers $-\infty$).

4. On voit bien sur cet exemple qu'un équivalent qui change de signe est inexploitable : $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais $\sum u_n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'ont pas même nature. On voit aussi, a posteriori, que v n'était pas décroissante puisque la série diverge.

Récapitulation : méthode d'étude d'une série alternée.

- Utiliser le TSSA si la décroissance de v est évidente, ou si on a absolument besoin d'une majoration des restes. Auquel cas il est obligatoire de *justifier soigneusement la décroissance* de $|u_n|$.
- Sinon utiliser un DL, en le poussant à un *ordre suffisant pour que le dernier terme soit sommable.*

8. Calcul de la somme d'une série

8.1 Calcul exact

Donner la valeur exacte de S signifie exprimer cette valeur à l'aide des nombres et fonctions usuelles. Il faut être conscient que "usuel" a un sens relatif : $\Gamma(\gamma)$ est usuel pour le mathématicien, par pour l'étudiant moyen.

On verra plus tard des méthodes basées sur les théorèmes concernant les séries entières. Mais une méthode élémentaire est celle du télescopage, qui consiste à écrire $u_n = a_{n+1} - a_n$ ou plus généralement :

$$u_n = \sum\nolimits_{k=0}^{p} \beta_k a_{n+k} \quad \text{avec} \quad \sum\nolimits_{k=0}^{p} \beta_k = 0$$

Dans le cas : $u_n = a_{n+1} - a_n$:

$$U_n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k = \sum\nolimits_{k=1}^{n+1} a_k - \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0$$

d'où $S = \lim a - a_0$. Le cas général est analogue : on sépare en plusieurs sommes, on réindexe et on simplifie.

Exemple :
Calcul de $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$.

1. On commence à 2 car en dessous le dénominateur est nul.
   S existe car $\frac{1}{n^3-n} \sim n^{-3}$.

2. L'idée est de décomposer en éléments simples :

$$u_n = \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n+1}$$

   En multipliant par n puis en affectant par 0 on obtient $a = -1$. De manière analogue $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. La somme des coefficients est nulle donc la série est bien télescopable.

3. En séparant et réindexant :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum\nolimits_{k=2}^{n} \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} + \frac{c}{k+1}\right) \\ &= a\sum\nolimits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + b\sum\nolimits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + c\sum\nolimits_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

   En posant $A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned} U_n &= aA_n + b\left(A_n + 1 - \tfrac{1}{n}\right) + c\left(A_n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n+1}\right) \\ &= \underbrace{(a+b+c)}_{0} A_n + b - \tfrac{1}{2}c - \tfrac{b}{n} + \tfrac{c}{n+1} \end{aligned}$$

   Ainsi $S = b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}$.

8.2 Calcul numérique

C'est la seule possibilité dans la plupart des cas. Les ordinateurs ont beau être rapides, ils ne peuvent pas faire un nombre infini d'opérations. On écrit donc :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \simeq \sum_{k=0}^{n} u_k = U_n$$

qui est calculable, d'autant plus facilement et correctement que n est petit. En revanche si on est obligé de prendre n grand, le calcul de U_n sera entaché d'un grand nombre d'erreurs d'arrondi, qui peuvent rendre le résultat médiocre.
L'erreur *théorique* d'approximation est :

$$\varepsilon_n = |S - U_n| = |R_n|$$

On cherche à la majorer par une expression simple, de façon à pouvoir donner une CS sur n pour que l'erreur soit acceptable. On remarque que le théorème série-intégrale et le théorème des séries alternées fournissent une telle majoration.

Exemple :
Calcul numérique de $S = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$ dont le calcul exact est impossible.

$f : t \mapsto t^{-3}$ est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ donc le théorème série-intégrale s'applique et donne :

$$\int_{n+1}^{+\infty} t^{-3}dt \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} t^{-3}dt \quad \text{ie} \quad \frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

L'inégalité de droite donne qu'une CS pour que l'erreur soit $< 10^{-3}$ est :

$$\frac{1}{2n^2} < 10^{-3} \quad \text{ie} \quad n^2 > 500 \quad \text{ie} \quad n \geq 23$$

Ainsi $U_{23} = \sum_{k=1}^{23} k^{-3}$ est une approximation de S dont les 3 premières décimales sont correctes. Si on veut 9 décimales, une CS est :

$$\frac{1}{2n^2} < 10^{-9} \quad \text{ie} \quad n^2 > 5.10^8 \quad \text{ie} \quad n \geq 22361$$

U_{22361} est en théorie une approximation valable, mais en pratique ne le sera pas car on ajoute plus de 10^4 termes entachés chacun d'une erreur de 10^{-12} (si on fait le calcul en simple précision), soit une erreur totale de l'ordre de 10^{-8}. Ainsi seules les 8 premières décimales seront correctes.