STABILITE

☞ ***1)- <u>NOTION DE STABILITE</u>***

☞ ***2)- <u>CONDITIONS DE STABILITE</u>***

1) NOTION DE STABILITE

a) Généralités :

La stabilité d'un système (asservi ou non) revêt une importance toute particulière.

C'est en fait la première condition de bon fonctionnement, sauf cas particulier tel que : ***explosifs***

Système typiquement instable.

Plusieurs définitions de la stabilité peuvent être énoncées.

D'un point de vue qualitatif on dira qu'un système est stable si, écarté de sa position d'équilibre par une perturbation non divergente :

☞ ***la variable de sortie ne diverge pas***

→ ***définition au sens large***

Echelon, sinusoïdale mais pas la rampe.

On dit aussi : Définition du programme.

" à entrée bornée correspond une sortie bornée "

☞ ***il tend à y revenir***

→ ***définition à tendance asymptotique***

À noter qu'un système stable peut très bien diverger en réponse à une entrée divergente.

La réponse d'un système stable à une rampe (entrée divergente) est divergente.

Par contre, dans le cas des systèmes linéaires on a les résultats suivants :

- ***pour une entrée constante (échelon) il n'y a qu'un seul point d'équilibre (pour la sortie).***
- ***la notion de stabilité est indépendante de l'entrée considérée.***

Car la transformée de Laplace de l'impulsion vaut simplement : ***1***.

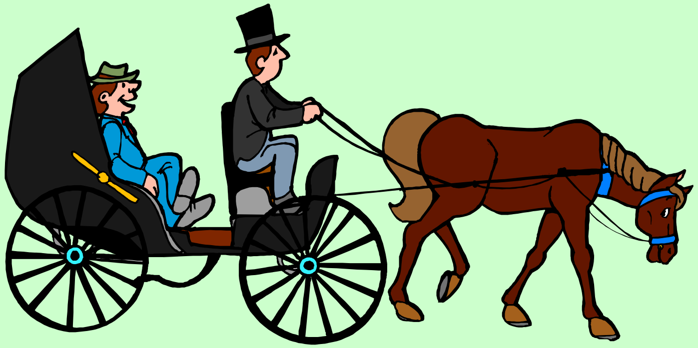
On va donc faire l'étude théorique en réponse à l'impulsion (Dirac) et généraliser aux autres types d'entrée.

<u>Nota :</u> ne pas confondre système stable et convergence de la sortie.

Même si le système est stable sa réponse à une rampe (entrée non bornée) diverge obligatoirement (ne converge pas).

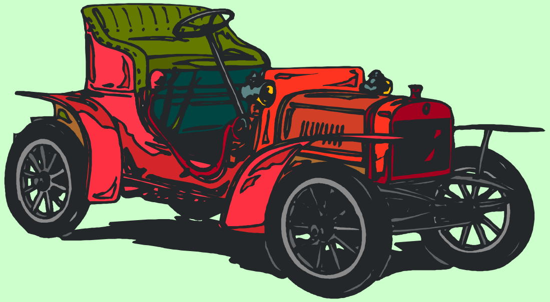
b) Exemples :

Voiture traction avant → **stable**



Si on lâche le volant en ligne droite après un « à-coup » sur les roues avant (nid de poule par exemple), la voiture oscille mais les roues finissent par revenir dans l'axe de la voiture.

Voiture propulsion arrière → **instable**



Ici les roues ne reviennent pas dans l'axe de la voiture et celle-ci se met à osciller de plus en plus.

2) CONDITIONS DE STABILITE

a) Condition nécessaire et suffisante de stabilité :

Pour un système linéaire la stabilité étant indépendante du signal d'entrée, il suffit d'étudier l'équation différentielle représentative du système :

sortie

$$a_0 . s(t) + a_1 . \frac{ds(t)}{dt} + a_2 . \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + ...+ a_n . \frac{d^n s(t)}{dt^n}$$

$$= b_0 . e(t) + b_1 . \frac{de(t)}{dt} + b_2 . \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + ...+ b_m . \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

entrée

Nota: $m < n$

$$a_n \times \frac{d^n s(t)}{dt^n} + ... + a_2 \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \times s(t) = b_m \times \frac{d^m e(t)}{dt^m} + ... + b_2 \times \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{de(t)}{dt} + b_0 \times e(t)$$

La fonction de transfert est donc :

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1.p + ... + b_m.p^m}{a_0 + a_1.p + ... + a_n.p^n}$$

Utilisons comme définition de stabilité pour un système linéaire que sa réponse <u>impulsionnelle</u> tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

Le système revient à sa position d'équilibre.

La transformée de Laplace de l'impulsion (Dirac) vaut 1 :

$\Rightarrow$ $E(p) = 1$ ***d'où*** $\boxed{FT(p) = S(p)}$

$FT(p) = S(p)$

Désignons par $p_1 \; p_2 \ldots p_q$ ***les pôles de la fonction de transfert et*** $\alpha_1 \; \alpha_2 \; \ldots \alpha_q$ ***leur ordre de multiplicité respectif.***

On peut alors montrer que la réponse impulsionnelle est de la forme :

Calcul mathématique non présenté ici.

$$s(t) = \sum_{i=1}^{q} Q_i(t).e^{p_i \times t}$$

Ce résultat n'est pas à connaître.

où $Q_i(t)$ ***est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à*** $\alpha_i - 1$

Notons $p_i = \sigma_i \pm i.\omega_i$ ***les racines complexes conjuguées***

et $p_i = \lambda_i$ ***les racines réelles de ce polynôme*** $Q_i(t)$,

la réponse impulsionnelle est donc de la forme :

$$s(t) = \sum_i Q_i(t).e^{\lambda_i.t} + \sum_i Q_i(t).\underbrace{e^{\sigma_i.t}}_{\text{partie réelle}}.\underbrace{\cos(\omega_i.t+\varphi_i)}_{\text{partie imaginaire}}$$

Toujours pas à connaître.

racines réelles

racines complexes

$$s(t) = \sum_i Q_i(t).e^{\lambda_i.t} + \sum_i Q_i(t).e^{\sigma_i.t}.\cos(\omega_i.t + \varphi_i)$$

A partir de cette expression il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour que la sortie s(t) tende vers zéro quand $t \to \infty$ est que les parties réelles λ_i et σ_i des pôles de FT(p) soient strictement négatives.

Ainsi les exposants des exponentielles tendent vers -∞.

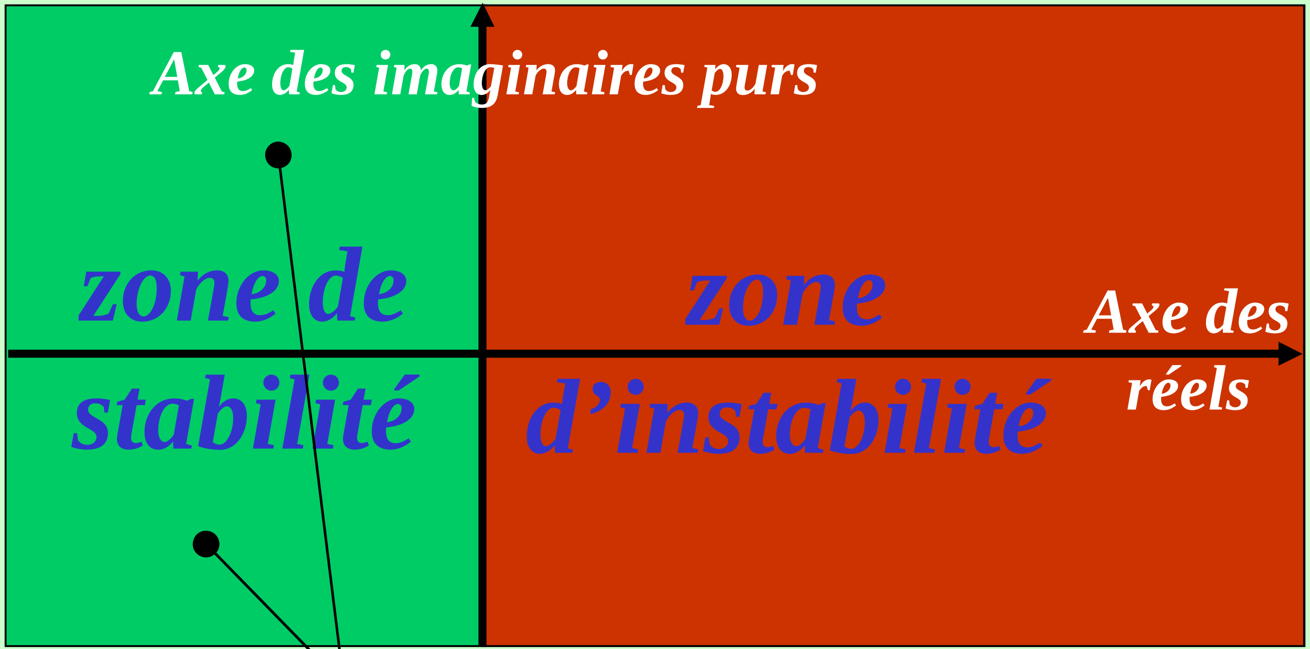
Valeurs de ***p*** annulant le dénominateur de la ***FTBF***.

Enoncé : ***un système linéaire est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.***

Condition nécessaire ***et suffisante*** à connaître par cœur.

Un système linéaire est stable <u>si et seulement si</u> tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative

Représentation graphique de ce résultat :



Tous les pôles de la fonction de transfert du système (***FT<u>BF</u>***) doivent être situés dans cette zone.

Nota :

☞ ***si le système est asservi, il s'agit de sa fonction de transfert en boucle fermée FTBF.***

☞ ***si un pôle est nul le système est instable.***

b) Condition nécessaire :

Sera vu en TD.

On démontre qu'un système stable a obligatoirement tous les coefficients du dénominateur de sa fonction de transfert de même signe (et sans terme manquant).

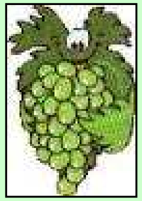
On a en fait :

système stable ⇒ ***coefficients du dénominateur de sa FT de même signe***

système stable ⇍ ***coefficients du dénominateur de sa FT de même signe***

Condition nécessaire mais pas suffisante.

système instable ⇐ ***coefficients du dénominateur de sa FT pas de même signe***



c) Conclusion :

Pour les systèmes d'ordre 1 ou 2 la condition de même signe pour les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert est une

condition nécessaire et suffisante

Pour les autres systèmes (ordre >2) c'est une simple

condition nécessaire

Ce qu'il faut avoir retenu

(minimum « vital »…)

- La définition retenue pour la stabilité : « *à entrée bornée, sortie bornée* ».
- Connaître la condition nécessaire et suffisante de stabilité : « un système est stable ***si et seulement si*** *tous les pôles de sa* ***FTBF*** *sont à partie réelle strictement négative ».*
- Connaître la condition (simplement) nécessaire de stabilité : « ***si*** *le système est stable* ***alors*** *les coefficients du dénominateur de sa* ***FTBF*** *sont tous de même signe (sans terme manquant)* ».

La suite sera vue plus tard.