PROGRAMME 11

Semaine du 11 au 16 décembre

1) Intégrale dépendant d'un paramètre

a) Théorème de convergence dominée et d'échange série-intégrales (intégration terme à terme)

b) Continuité et dérivation de l'application : $F : A \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$

Extension à la classe C^p.

2) Séries entières

a) Rayon de convergence d'une série entière : Existence et unicité du rayon.
Définition du disque ouvert de convergence, lien entre les rayons : somme, produit de Cauchy, dérivation formelle, intégration formelle de séries entières.

b) Propriétés de la fonction somme S :
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence (prouvé) et sur le disque ouvert de convergence (admis).
Pour le cas de la variable réelle, S est dérivable sur $]-R,R[$, de classe C^∞ sur $]-R,R[$.
Expression des dérivées successives, unicité des coefficients, calcul d'une primitive.

c) Développements en séries entières classiques.
Fonctions usuelles : $t \longmapsto \ln(1+t)$, $t \longmapsto -\ln(1-t)$, $arctan$, exp, cos, sin, ch, sh
Cas de $t \longmapsto exp(-1/t^2)$, $0 \longmapsto 0$

<u>Questions de cours</u> : Liste exhaustive.

- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$: ensemble de définition, domaine de continuité et de dérivabilité.
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Rayon de la somme de deux séries entières.
- Le produit de Cauchy de 2 séries entières est une série entière, rayon.
- Convergence normale d'une série entière sur tout segment de $]-R,R[$.
  Continuité de la fonction somme sur $]-R,R[$.
- Cas où $0 < R < +\infty$ et $\sum a_n R^n$ absolument convergente.
  La fonction somme est continue sur $[-R,R]$.
- $\forall p \in \mathbb{N}, \quad p!\, a_p = S^{(p)}(0)$

PROGRAMME 12

Semaine du 18 au 23 décembre

Séries entières

a) Rayon de convergence d'une série entière : Existence et unicité du rayon.
Définition du disque ouvert de convergence, lien entre les rayons : somme, produit de Cauchy, dérivation formelle, intégration formelle de séries entières.

b) Propriétés de la fonction somme S :
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence (prouvé) et sur le disque ouvert de convergence (admis).
Pour le cas de la variable réelle, S est dérivable sur $]-R, R[$, de classe C^∞ sur $]-R, R[$.
Expression des dérivées successives, unicité des coefficients, calcul d'une primitive.

c) Développements en séries entières classiques.
Fonctions usuelles : $t \longmapsto \ln(1+t)$, $t \longmapsto -\ln(1-t)$, $arctan$, exp, cos, sin, ch, sh
Cas de $t \longmapsto exp(-1/t^2)$, $0 \longmapsto 0$
Méthode avec la série de Taylor.
Méthode avec une équation différentielle.

<u>Questions de cours</u> : Liste exhaustive.

- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Rayon de la somme de deux séries entières.
- Le produit de Cauchy de 2 séries entières est une série entière, rayon.
- Convergence normale d'une série entière sur tout segment de $]-R, R[$.
  Continuité de la fonction somme sur $]-R, R[$.
- Cas où $0 < R < +\infty$ et $\sum a_n R^n$ absolument convergente.
  La fonction somme est continue sur $[-R, R]$.
- $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $p!\, a_p = S^{(p)}(0)$
- Développement en série entière de $t \longmapsto (1+t)^a$ pour $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

BONNES VACANCES ! ! !