17 / 18 **PROGRAMME 5** **PSI**

Semaine du 16 au 21 octobre

1) **Programme d'algèbre précédent** (programme 4)

2) **Séries réelles et complexes**

Propriétés générales, étude de la série harmonique , des séries téléscopiques, des séries géométriques, de la série exponentielle.

Séries à termes positifs : Théorèmes de comparaison, critère de D'Alembert, comparaison séries-intégrales, séries de Riemann.

Séries alternées : définition, théorème et majoration du reste.

Absolue convergence, produit de Cauchy.

Questions de cours :

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixé et l'application $\varphi_A : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{cases}$

  Alors φ_A est un endomorphisme et $\mathrm{Ker}(\varphi_A) \neq \{0\}$.

- Si $A = \mathrm{diag}\,(A_1, \ldots, A_q)$ alors $\forall\, P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = \mathrm{diag}\,(P(A_1), \ldots, P(A_q))$
- Calcul du déterminant de VanderMonde
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$
- séries géométriques et calcul du reste en cas de convergence.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$, $\sin x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ et ch et sh à partir de la série exponentielle.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\left(\sum (u_{n+1} - u_n)\right)$ converge.

  Application du résultat précédent à la convergence de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$
- Théorème spécial des séries alternées : uniquement la convergence de la série, pas la majoration du reste.
- Application du produit de Cauchy à $exp(z + z')$.

BONNES VACANCES ! ! ! !

PROGRAMME 6

Semaine du 6 au 11 novembre

1) Séries réelles et complexes : Voir ci-dessus

2) Réduction des endomorphismes

a) Eléments propres d'un endomorphisme : Valeurs propres, vecteurs propres :
Si v commute avec u , les sous espaces propres de u sont stables par v
Cas des valeurs propres deux à deux distinctes : Les SEP sont en somme directe
Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
Eléments propres d'une matrice.

b) Polynôme caractéristique : somme et produit des valeus propres quand χ_A est scindé.
Ordre de multiplicité des valeurs propres
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme carac téristique de u
$1 \leqslant \dim\ (\text{SEP}\ (\lambda)) \leqslant$ ordre de multiplicité de λ.

<u>**Questions de cours**</u> : Liste exhaustive.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$
- Séries géométriques et calcul du reste en cas de convergence.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}, \quad \sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ et ch et sh à partir de la série exponentielle.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\left(\sum (u_{n+1} - u_n)\right)$ converge.
  Application du résultat précédent à la convergence de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$
- Théorème sp écial des séries alternées : uniquement la convergence de la série, pas la majoration du reste.
- Application du produit de Cauchy à $exp(z + z')$.
- Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u
  $1 \leqslant \dim\ (\text{SEP}\ (\lambda)) \leqslant$ ordre de multiplicité de λ.

<u>Prévisions</u> : Diagonalisation, intégrales généralisées