PROGRAMME 7

Semaine du 13 au 18 novembre

Réduction des endomorphismes

a) Eléments propres d'un endomorphisme : Valeurs propres, vecteurs propres :
Si v commute avec u , les sous espaces propres de u sont stables par v
Cas des valeurs propres deux à deux distinctes : Les SEP sont en somme directe
Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
Eléments propres d'une matrice.

b) Polynôme caractéristique : somme et produit des valeurs propres quand χ_A est scindé.
Ordre de multiplicité des valeurs propres
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme carac téristique de u
$1 \leqslant \dim(\text{SEP}(\lambda)) \leqslant$ ordre de multiplicité de λ.

c) Diagonalisation en dimension finie : Caractérisation avec la somme des dimensions des sous espaces propres.
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in Sp(u), \quad \dim(E_\lambda) =$ ordre de multiplicité de λ
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé et à racines simples.
Théorème de Cayley Hamilton (admis)
Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .
Si u est diagonalisable, pour tout sous espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F l'est aussi.

d) Trigonalisation en dimension finie sur des exemples. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

e) Puissance $n-$ième de matrices, suites récurrentes linéaires à coefficients constants, commutant d'une matrice.

Questions de cours : Liste exhaustive.

- Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u
  $1 \leqslant \dim(\text{SEP}(\lambda)) \leqslant$ ordre de multiplicité de λ.
- Si u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre λ alors $u = \lambda.Id_E$.
- Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .

PROGRAMME 8

Semaine du 20 au 25 novembre

1) **Réduction des endomorphismes** : Voir ci-dessus

2) **Intégrales impropres ou généralisées** : Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

   a) Définition : Si $f \in C_0^m([a,b[,\mathbb{K})$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente lorsque $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{K}$.
   Linéarité, relation de Chasles, cas d'un "faux problème " en b (prolongement par continuité).
   La nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de f au voisinage de b
   Exemples de référence : Intégrales de Riemann, exponentielle, logarithme.
   Calcul d'une intégrale impropre : Changement de variables et intégration par parties.

   b) Intégrale de fonctions positives : L'intégrale sur $[a,b[$ converge ssi la primitive est majorée.
   Règles usuelles de comparaison. Cas d'une intégrale nulle. Comparaison série-intégrale.

   c) Absolue convergence et intégrabilité : f est intégrable ou son intégrale est absolument convergente sur I lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.
   Une intégrale absolument convergente est convergente.

<u>**Questions de cours**</u> : Liste exhaustive.

- Si u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre λ alors $u = \lambda.Id_E$.
- Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .
- Pour une fonction positive, l'intégrale sur $[a,b[$ converge ssi $\left(x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)$ est majorée.
- Convergences des intégrales de Riemann en $+\infty$ et en $b \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$.
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$
- $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$: ensemble de définition et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$