PROGRAMME 5

Semaine du 15 au 20 octobre

1) **Fonctions à valeurs réelles** : (Révisions)
Limites, continuité, dérivabilité (th de Rolle et des accroissements finis), formules de Taylor, développements limités. Fonctions circulaires réciproques, fonctions hyperboliques. Exemples de calculs d'intégrales, sommes de Riemann. Extension aux fonctions à valeurs complexes.

2) **Suites réelles et complexes** : Révisions

3) **Séries réelles et complexes**
Propriétés générales, étude de la série harmonique , des séries téléscopiques, des séries géométriques, de la série exponentielle.
Séries à termes positifs : Théorèmes de comparaison, critère de D'Alembert, comparaison séries-intégrales, séries de Riemann.
Séries alternées : définition, théorème et majoration du reste.
Absolue convergence, produit de Cauchy.

Questions de cours :

- Arcsin est impaire, dérivée de Arcsin et Arctan, calcul de cos(arcsin x), cos(arctan x) et sin(arctan x) , arctan x + arctan(1/x).
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad exp(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$
- Suite arithmético-géométrique $\quad (u_{n+1} = au_n + b)$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim \ln n$
- Séries géométriques et calcul du reste en cas de convergence.
-
- La suite $\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad$ converge si et seulement si la série $\quad \left(\sum (u_{n+1} - u_n)\right) \quad$ converge.
  Application du résultat précédent à la convergence de $\quad \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n\right)$
- Séries de Riemann.
- Théorème spécial des séries alternées : uniquement la convergence de la série, pas la majoration du reste.
- Application du produit de Cauchy à $exp(z + z')$.

BONNES VACANCES ! ! ! !

Semaine du 5 au 10 novembre

1) Séries réelles et complexes : Voir ci-dessus

2) Réduction des endomorphismes

a) Eléments propres d'un endomorphisme : Valeurs propres, vecteurs propres :
Si v commute avec u , les sous espaces propres de u sont stables par v
Cas des valeurs propres deux à deux distinctes : Les SEP sont en somme directe
Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
Eléments propres d'une matrice.

b) Polynôme caractéristique : somme et produit des valeurs propres quand χ_A est scindé.
Ordre de multiplicité des valeurs propres
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme carac téristique de u
$1 \leqslant$ dim (SEP (λ)) $\leqslant$ ordre de multiplicité de λ.

c) Diagonalisation en dimension finie : Caractérisation avec la somme des dimensions des sous espaces propres.
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in Sp(u)$, dim (E_λ) = ordre de multiplicité de λ
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé et à racines simples.
Théorème de Cayley Hamilton (admis)
Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .
Si u est diagonalisable, pour tout sous espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F l'est aussi.

d) Trigonalisation en dimension finie sur des exemples. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

e) Puissance $n-$ième de matrices, suites récurrentes linéaires à coefficients constants,
commutant d'une matrice.

Questions de cours : Liste exhaustive.

- Théorème spécial des séries alternées : uniquement la convergence de la série, pas la majoration du reste.
- Application du produit de Cauchy à $exp(z+z')$.
- Cas des valeurs propres deux à deux distinctes : Les SEP sont en somme directe.
- Si x est vecteur propre de u alors x est vecteur propre de $P(u)$.
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u
  $1 \leqslant$ dim (SEP (λ)) $\leqslant$ ordre de multiplicité de λ.
- Si u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre λ alors $u = \lambda.Id_E$.
- Toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .

Prévisions : Fonctions de deux variables