1) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

On considère $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On note $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$.

a) Que signifie « A est réalisé. » ?

b) On suppose que $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que $P(A) = 0$

c) On suppose que $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Montrer que $P(A) = 1$

Indication : Calculer $P(\bar{A})$ et utiliser : $\forall x \geq 0, 1 - x \leq e^{-x}$

d) Montrer que dans une suite de lancers indépendants de pièces de monnaie identiques, la séquence $PFPPF$ apparaît presque sûrement une infinité de fois.

2) Voici le principe d'un jeu : Il y a trois portes identiques et opaques. Derrière deux d'entre elles il n'y a rien et derrière la troisième se trouve un cochon. A la différence de l'animateur, le joueur ne sait pas laquelle. Le joueur choisit une porte sans l'ouvrir. L'animateur ouvre alors une des deux portes restantes derrière laquelle il n'y a pas de cochon. Il reste donc deux portes closes : celle choisie par le joueur et une autre. L'animateur autorise alors le joueur à éventuellement changer son choix et choisir l'autre porte. Une fois que le joueur a choisi, l'animateur ouvre la porte choisie par le joueur et si c'est celle qui cachait le cochon, le joueur le gagne. Le joueur a-t-il intérêt à changer son choix à la deuxième étape ?

3) Deux joueurs J_1 et J_2 lancent à tour de rôle deux dés équilibrés.

J_1 gagnera en faisant un total de 7 et J_2 en faisant un total de 6.

Le jeu s'arrêtera lorsqu'un des joueurs a gagné.

J_1 joue le premier et ensuite ils jouent alternativement jusqu'à l'arrêt éventuel du jeu.

a) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité des événements F_n : « J_1 gagne à son n -ième lancer. » et G_n : « J_2 gagne à son n -ième lancer. »

b) Déterminer la probabilité de succès de chacun des joueurs.

c) Le jeu s'arrête-t-il ?

4) La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0.05.

Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0.96.

Si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0.98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité :

a) qu'il y ait une erreur de contrôle ?

b) qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

5) Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On en tire successivement n avec remise.

a) Calculer, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la probabilité des événements B_i : « on obtient i boules blanches. »

b) En déduire la probabilité que le nombre de boules blanches obtenu soit pair.

- 6) Une loterie se déroule une fois par semaine.
 Chaque semaine, sur 100 billets, k sont gagnants et on suppose $k \leq 90$.
 Chaque billet coûte 1 euro et on dispose de 10 euros.
 Deux stratégies sont possibles : A : On achète 10 billets en une seule fois.
 B : On achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.
 Quelle est selon vous la meilleure stratégie pour obtenir au moins un billet gagnant ?
- 7) Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
 On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.
- Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?
 - Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?
 - Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?
- 8) On dispose d'un trousseau de n clés indifférenciables pour ouvrir une serrure.
- L'expérience a lieu dans le noir et, à chaque essai, on utilise une clé choisie au hasard.
 Quelle est, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'ouvrir pour la première fois la serrure au p -ième essai ?
 Quelle est la probabilité que la porte reste fermée ?
 - A présent, on a une lampe de poche et on essaie successivement toutes les clés.
 Quelle est maintenant la probabilité d'ouvrir pour la première fois la serrure au p -ième essai ?
- 9) Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p avec ($0 < p < 1$) et lorsqu'il est vert, passe au rouge avec la probabilité q ($0 < q < 1$).
 On note r_n (resp. v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (resp. au vert) à l'instant $t = n$. On suppose $r_0 + v_0 = 1$
- Montrer l'existence d'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
 - Montrer que A est diagonalisable et calculer ses éléments propres.
 - Calculer r_n et v_n en fonction de n . Quelles sont les limites des suites (r_n) et (v_n) ?
- 10) Une infinité de joueurs notés $A_1, A_2, \dots$ s'affrontent à pile ou face, avec une pièce honnête, de la manière suivante :
- A_1 et A_2 commencent, le perdant est éliminé et le gagnant rencontre A_3 , le perdant est éliminé et le gagnant rencontre $A_4, \dots$
- Est déclaré vainqueur le joueur qui gagne trois parties consécutives et le jeu s'arrête alors.
- Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité que A_n gagne le tournoi et q_n la probabilité qu'il joue.
- Montrer que : $p_n = \frac{1}{8}q_n$.
 - Calculer q_n pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Montrer que : $\forall n \geq 5, q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$
 - Calculer pour tout entier n , q_n et p_n .