PSI

RÉVISIONS ALGÈBRE

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = Id$.

a) Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f - Id) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + Id)$.

b) En déduire que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\,(f - Id)$ et $\ker(f - Id)$ sont supplémentaires.

3) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f, g) \in \mathcal{L}^2(E)$.
On suppose que $E = \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$. Montrer que deux sommes sont directes.

4) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2 - 7.f + 12.e = O$ où $e = Id_E$.

a) Montrer que $p = f - 3.e$ et $q = 4.e - f$ sont des projecteurs de E.

b) Calculer poq, qop et $p + q$.

c) En déduire que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\ q$ et $\mathrm{Im}\ p = \mathrm{Ker}\, q$. Que peut-on en déduire sur p et q ?

d) Exprimer f à l'aide de p et q, et calculer pour n dans $\mathbb{N}^*$, f^n en fonction de p, q, n.

e) Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de p et q.
La formule de **d)** est-elle valable pour n dans $\mathbb{Z}$?

5) Soit E un espace vectoriel et $E_1, E_2, \ldots, E_p$, p sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$\Big(E_1, E_2, \ldots, E_p \quad \text{sont en somme directe}\Big) \iff \Big(\forall\, i \in [\![2, p]\!], \quad E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}\Big)$$

6) $\mathcal{E}$ est le $\mathbb{R}-$ espace vectoriel des fonctions numériques continues et $2\pi-$ périodiques définies sur $\mathbb{R}$.
Si $f \in \mathcal{E}$, on note $S(f)$ la fonction numérique définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(f)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x - t)dt$.

a) Vérifier que S est un endomorphisme de $\mathcal{E}$. Calculer $S(\cos)$ et $S(\sin)$.
Montrer que $\mathcal{F} = \mathrm{Im}\ S$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension 2 dont on donnera une base.

b) On pose $T = Id + S$. Prouver que T est injectif.

c) On fixe $f \in \mathcal{E}$. Posons $\mathcal{G} = \{\lambda f + S(g) \ / \ (\lambda, g) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}\}$.
Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension finie et stable par T.

d) Démontrer que l'endomorphisme induit par T sur $\mathcal{G}$ est un automorphisme de $\mathcal{G}$.
En déduire que f possède un antécédent par T puis que T est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

7) Chercher P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \leqslant 5$ et $(X-1)^3 \mid P - 2$ et $(X+1)^3 \mid P + 4$

8) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de montrer que si P est un polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$ alors $(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, ie $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Soit $u \in E$ tel que $f^{p-1}(u) \neq 0_E$. Montrer que $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ est une base de E.

b) Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad H \longmapsto H(X+1) - H(X)$

i) Déterminer le degré de $\varphi(H)$ et vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

ii) Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

iii) Etudier la nilpotence de φ.

c) Soit P un polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$. Pour k entier de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi^k(P)$ et conclure.

10) Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que : $A^2 = 2A - I_n$.
Calculer, pour $p \geqslant 2$, le reste de la division euclidienne de X^p par $(X-1)^2$. En déduire A^p.

11) **a)** Pour $n \geqslant 2$ et $a \in \mathbb{R}$, calculer les racines complexes du polynome : $P = (X+1)^n - \mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{i}\,na}$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

b) Calculer pour $n \geqslant 2$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

12) Que peut-on dire d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel qui admet un polynôme annulateur de degré 1 ?

13) E est un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que si p est un projecteur de E alors sa trace est égale à son rang.

14) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\big(\forall\, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA\big) \implies \big(\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \;/\; A = \lambda I_n\big)$.

15) Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

16) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que si $\operatorname{rg}(A) = 1$ et $\operatorname{tr}(A) = 1$ alors $A^2 = A$.

17) On considère la matrice carrée d'ordre n de $M_n(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible.

b) Calculer A^n et en déduire A^{-1}.

18) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair.

19) On dit qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est à diagonale strictement dominante si :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad |a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

Montrer que toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.
Indication : Raisonner par l'absurde en supposant que $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.

20) a et b sont deux réels distincts et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On se propose de calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \ldots & a \\ b & \lambda_2 & \ldots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix} \quad \text{en utilisant pour } x \text{ dans } \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \ldots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ldots & a + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b + x & b + x & \ldots & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

a) Montrer que : $\exists\,(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = ux + v.$

b) Déterminer u et v et en déduire la valeur de D_n.

21) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit $D_1 = 1 + a^2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 + a^2 & a \\ a & 1 + a^2 \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 + a^2 & a & 0 \\ a & 1 + a^2 & a \\ 0 & a & 1 + a^2 \end{vmatrix}$

et pour $n \geqslant 3$, $D_n = \begin{vmatrix} 1 + a^2 & a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a & 1 + a^2 & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 + a^2 & a & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a & 1 + a^2 \end{vmatrix}$.

a) Trouver, pour $n \geqslant 3$, une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

b) En déduire la valeur de D_n.

22) n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$, n polynômes de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n réels.

Montrer que $\Delta = \begin{vmatrix} P_1(x_1) & \ldots & P_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(x_1) & \ldots & P_n(x_n) \end{vmatrix}$ est nul.

23) Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs du réel m, le système suivant :

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^2 z = 1 \end{cases}$$

24) L'incontournable : Les Polynômes de Tchebycheff ! ! ! ! !

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

a) Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.

b) Quel sont le degré de T_n et son coefficient dominant ?

c) Etudier la parité de T_n.

d) Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

e) Montrer que T_n est l'unique polynôme qui vérifie : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

f) Dans cette question uniquement, on suppose que l'entier n est non nul.
Pour quelles valeurs de θ a-t-on $T_n(\cos\theta) = 0$?
Montrer alors que T_n a n racines réelles distinctes dans $[-1, 1]$. Conclure.

g) Déterminer les racines de T_n'.

On définit l'application Φ telle que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$

h) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

i) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer le degré de $\Phi(P)$ en fonction de celui de P.

j) En déduire le noyau de Φ.

j) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

l) Calculer la trace de Φ.