PSI

SÉRIES ENTIÈRES

1) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\left(\sum \dfrac{\sin n}{n+1} z^n\right)_{n\geqslant 0}$ **b)** $\left(\sum \dfrac{2^n}{n+1} z^{2n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ **c)** $\left(\sum (\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}} - \mathrm{e}^{\sqrt{n}}) z^n\right)_{n\geqslant 0}$

2) Déterminer le rayon de convergence et calculer, pour x, réel à déterminer, la somme de la série entière de terme général :

a) $u_n(x) = n^2 x^n$ **b)** $u_n(x) = \dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ **c)** $u_n(x) = \dfrac{n+1}{n+3}\,\dfrac{x^n}{n!}$.

d) Dans le cas où $R \neq +\infty$ ces séries convergent-elles pour $x = R$ ou $x = -R$?

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la série entière $\left(\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}\right)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme à l'aide de fonctions classiques.
On distinguera les cas $x > 0$ *et* $x < 0$.

4) Soit $\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières réelles :
$\left(\sum x^n \cos(n\theta)\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\sum x^n \sin(n\theta)\right)_{n\geqslant 0}$.

5) Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\left(\sum \left(\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch} k\right) x^n\right)_{n\geqslant 0}$.

6) Pour x réel, on note $a_n = (-1)^n \dfrac{\binom{2n}{n}}{2n-1}$ et on considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. On note f la somme de cette série.

b) Montrer que : $\forall\, x \in]-R, R[,\quad (1+4x)f'(x) = 2f(x)$.

c) En déduire la valeur de f.

7) Etablir l'existence de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(4n+2)\,2^n}$ et calculer S à l'aide de la série entière $\left(\sum \dfrac{x^{4n+2}}{4n+2}\right)_{n\geqslant 0}$.

8) **a)** Montrer que la série $\left(\sum \dfrac{1}{(5n)!}\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

b) On note $\omega = exp(\dfrac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{5})$. Calculer pour tout entier n, $a_n = 1 + \omega^n + \omega^{2n} + \omega^{3n} + \omega^{4n}$.

c) En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(5n)!}$. *On pourra considérer* $\left(\sum a_n \dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$

9) Déterminer les développements en série entière des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$

b) $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \longmapsto \ln\sqrt{1 - 2x\operatorname{ch} a + x^2}$.

10) Calculer le développement en série entière de la fonction : $f : x \longmapsto \arctan(\sqrt{3} + x)$.

11) Le but de cet exercice est de trouver le développement en série entière de la fonction : $f : x \longmapsto (\arcsin x)^2$

a) Montrer que f' est solution sur $]+1,1[$ de l'équation différentielle : $(E) : (1-x^2)y' - xy - 2 = 0$

b) Soit $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\geqslant 0}$ une série entière de rayon $R > 0$ dont la somme h est solution de (E) sur $]-R,R[$.
Trouver une relation de récurrence portant sur les a_n.

c) On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n$$

Calculer a_n pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\geqslant 0}$?

e) En déduire le développement en série entière de f'.

f) Quel est le développement en série entière de f ?

12) Calculer à 10^{-6} près $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}$.

13) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\longmapsto+\infty} a_n = 0$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A telle que :

$$\forall\, x \in A, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$$

a) Montrer que la série $(\sum v_n)$ définie sur A par $\forall\, x \in A, \quad v_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ converge simplement puis uniformément sur A.

b) Application : Montrer que les séries entières $\left(\sum (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ sont uniformément convergentes sur $[0,1]$.
En déduire que les sommes de ces séries pour $x = 1$ sont respectivement $\ln(2)$ et $\pi/4$.

14) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$.

On considère les séries entières de termes généraux $u_n \dfrac{x^n}{n!}$ et $S_n \dfrac{x^n}{n!}$.
On note $u(x)$ et $S(x)$ leurs sommes respectives.

a) Quel est le rayon de convergence de $\left(\sum u_n \dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\sum S_n \dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$?

b) Déterminer une relation entre $S(x)$, $S'(x)$ et $u'(x)$.

c) On suppose que $\displaystyle\lim_{n\longmapsto+\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\longmapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x) = \ell$.

d) On prend $u_n = (-1)^n$. Calculer $S(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\longmapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)$.