PSI

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto n^2 x^n (1-x)$

a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

b) Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

2) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto n x^n (1-x^2)$

a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

b) Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

3) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $f_n :]0,+\pi[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{\sin^2 nx}{n \sin x}$

Etudier la convergence simple ou uniforme de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ sur tout ou partie de $]0,+\pi[$.

4) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{4-(\ln x)^{2n}}{3+(\ln x)^{2n}}$ si $x \neq 0$, $0 \longmapsto -1$

a) Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,1]$ et que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera. f est-elle continue ?

b) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geqslant 1}$ sur tout ou partie de $[0,1]$.

5) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$

Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

6) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $u_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{n + n^3 x^2}$

a) Étudier le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

b) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

c) Montrer qu'elle n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Montrer que $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

f) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

g) Calculer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit $\quad u_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$

a) Étudier les convergences simple, absolue, normale et uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

b) Montrer que $\quad S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) S admet-elle une limite en $+\infty$?

8) Après avoir étudié le domaine de définition des fonctions intervenants, calculer les limites suivantes, si elles existent :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(n+x)^2}$

9) Soit $\quad n \in \mathbb{N}^*, \quad p \in \mathbb{N}$.

a) On note $\quad a_p = \displaystyle\int_0^1 x^n\ (\ln x)^p\, dx$. Justifier que a_p existe et la calculer.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

10) Pour n dans $\mathbb{N}$, on définit $\quad u_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$

a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement vers une fonction S sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11) On définit pour $\quad n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$. On souhaite étudier : $\quad S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Quel est le domaine de définition de S ? Justifier qu'on peut limiter l'étude à $\mathbb{R}_+^*$.

b) La série de fonctions converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $[a, +\infty[$ oú $a > 0$?

c) La série de fonctions converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $[a, +\infty[$ oú $a > 0$?

d) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Quelle est la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
À l'aide de $\left(\displaystyle\sum \frac{x^2}{1+n^2x^2}\right)_{n\geqslant 1}$, montrer qu'il existe un réel non nul A tel que : $\quad S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{x^2}$.

f) En utilisant $\quad \forall\, x > 0, \quad x u_{n+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^2t^2}\, dt \leqslant x u_n(x)$, montrer que : $\quad S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.