MODELISATION X-ENS PSI 2022
LE CŒUR

1 PRESENTATION DE L'ETUDE

Q1/ On peut considérer qu'un modèle numérique, tridimensionnel, est un outil plus performant de formation : possibilité de changer le point de vue sur tout ou parties de l'organe. La description quantitative est aussi plus facile qu'avec les descriptions graphiques traditionnelles.

Q2/ Fréquence minimale : f_m=40mn^{-1}=40/60=0,667Hz. Pulsation minimale = 2π f_m=4,19rad.s^{-1}.
Fréquence maximale : f_M=180mn^{-1}=180/60=3,00Hz. Pulsation maximale = 2π f_M=18,8rad.s^{-1}.

2 MODELISATION DU MYOCARDE

2.1 Physiologie du muscle

Q3/ $l_c = Ns$. Et il vient $\varepsilon_c = \frac{l_c - l_{c0}}{l_{c0}} = \frac{Ns - Ns_0}{Ns_0} = \frac{s - s_0}{s_0}$.

2.2 Modèles unidirectionnels à l'échelle macroscopique

Q4/ Phase 4 : force développée à longueur fixe, c'est une contraction isométrique.
Phase 5 : une fois P décollée, le raccourcissement lent correspond à la contraction isotonique ; la force est quasi constante, opposée au poids de P et A. D'ailleurs la légende de la figure 6 mentionne la contraction isotonique.
Dommage de ne pas fixer explicitement les conventions d'orientation. La question 10 suggère que σ et ε sont de même signe ; la question 9 suggère que $\sigma_c > 0$ lorsque l'élément contractile est actif.

Q5/ En série $\sigma_s = \sigma_c$ (équilibre de la jonction entre (ES) et (EC), en parallèle, $\sigma = \sigma_c + \sigma_p$.

Q6/ $\varepsilon_s = \frac{l_s - l_{s0}}{l_{s0}} = \frac{(l_p - l_c) - (l_{p0} - l_{c0})}{l_{p0} - l_{c0}} = \frac{(l_p - l_{p0}) - (l_c - l_{c0})}{l_{p0} - l_{c0}} = \frac{\varepsilon_p l_{p0} - \varepsilon_c l_{c0}}{l_{p0} - l_{c0}}$ soit $\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_c a}{1 - a}$.

Par ailleurs, $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \varepsilon_p$.

Q7/ Pour des ressorts, la force est proportionelle à l'allongement. Lors d'une contraction, on a $\sigma > 0$ avec l'orientation conventionnelle de la figure 7, et/ou une diminution de l_p ($\varepsilon < 0$).

Pour une contraction isométrique, l_p et donc σ_p sont fixes. Si la force totale $\sigma = \sigma_c + \sigma_p$ est plus intense, alors $|\sigma_c| = |\sigma_s|$ augmente ; donc l_s augmente et $l_c = l_p - l_s$ augmente.

Pour une contraction isotonique, $\sigma = \sigma_c + \sigma_p$ est fixe. Si σ_c augmente, $\sigma_s = \sigma_c$ aussi. Alors l_s augmente (ressort) et donc l_c diminue.

Dans les deux cas, si σ_c augmente alors l_c diminue.

Q8/ On exploite la relation donnée $\frac{d\sigma_c}{dt} = -\lambda_c \sigma_c \left|\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right| + \upsilon_c \frac{d\varepsilon_c}{dt} + k_c u$.

Pour une contraction isométrique, on considère donc $\sigma_c > 0$ et $\frac{d\sigma_c}{dt} > 0$ et donc d'après Q7, l_c diminue, soit $\frac{d\varepsilon_c}{dt} < 0$, l'équation peut s'écrire $\left(\lambda_c \sigma_c + \upsilon_c\right)\left|\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right| = -\frac{d\sigma_c}{dt} + k_c u$.

Donc $\left|\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right| = \frac{1}{\lambda_c \sigma_c + \upsilon_c}\left\{-\frac{d\sigma_c}{dt} + k_c u\right\}$ d'où $0 < \left|\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right| < \frac{1}{\lambda_c \sigma_c + \upsilon_c} k_c U_{\max}$.

Q9/ Lors de la relaxation isotonique, le muscle s'allonge (donc σ_p augmente), et σ_c diminue (isotonique : $\sigma = \sigma_c + \sigma_p$ fixe) l_s diminue (ressort) d'où l_c augmente, $\frac{d\varepsilon_c}{dt} > 0$.

$\frac{d\sigma_c}{dt} = (-\lambda_c \sigma_c + \upsilon_c)\frac{d\varepsilon_c}{dt} + k_c u$.

Quand σ_c passe par un minimum, $\frac{d\sigma_c}{dt} = 0 = (-\lambda_c \sigma_c + \upsilon_c)\frac{d\varepsilon_c}{dt} + k_c u$, soit $\sigma_{c\min} = \frac{1}{\lambda_c}\left\{\upsilon_c - \frac{k_c u}{\frac{d\varepsilon_c}{dt}}\right\}$.

Pour que le résultat soit positif, il faut donc respecter $\upsilon_c - \frac{k_c u}{\frac{d\varepsilon_c}{dt}} > 0$, soit $u < \frac{\upsilon_c}{k_c}\frac{d\varepsilon_c}{dt}$.

Q10/ Modèles linéaires : $\sigma_s = E_s \varepsilon_s + cste$.

Comme la force est nulle à déformation nulle, $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$. De même $\sigma_p = E_p \varepsilon_p$.

La force surfacique totale est donc $\sigma = \sigma_s + \sigma_p = E_s \varepsilon_s + E_p \varepsilon_p$.

Or d'après Q6, $\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_c a}{1-a}$, donc $\sigma = E_s \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_c a}{1-a} + E_p \varepsilon_p = \left(\frac{E_s}{1-a} + E_p\right)\varepsilon_p - \frac{aE_s}{1-a}\varepsilon_c$.

Par identification $K = \frac{E_s}{1-a} + E_p$ et $K_c = -\frac{aE_s}{1-a}$.

Q11/ On résout l'équation $\frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_p} - \lambda \sigma_p = E_p$ avec la condition $\sigma_p = 0$ pour $\varepsilon_p = 0$:

$\sigma_p = \frac{E_p}{\lambda_p}\left(e^{\lambda_p \varepsilon_p} - 1\right)$. (N.B. On retrouve $\sigma_p \approx E_p \varepsilon_p$ pour $\varepsilon_p << 1$).

D'où $\sigma = \sigma_s + \sigma_p = \sigma_c + \sigma_p = \sigma_c + \frac{E_p}{\lambda_p}\left(e^{\lambda_p \varepsilon_p} - 1\right)$

2.3 Prise en compte des effets inertiels

Q12/ Bilan des actions mécaniques :

Force exercée par (ES) : $S_f \sigma_s \overrightarrow{e_x}$ force exercée par (EC) : $-S_f \sigma_c \overrightarrow{e_x}$

frottement fluide : $-S_f \eta \dot{x} \overrightarrow{e_x}$

Q13/ Théorème de la quantité de mouvement projeté sur l'axe Ox : $m\ddot{x} = S_f \sigma_s - S_f \sigma_c - S_f \eta \dot{x}$.

Comme $\varepsilon_c = \dfrac{l_c - l_{c0}}{l_{c0}}$, $x = l_c = \varepsilon_c l_{c0} + l_{c0}$. On en déduit $\dot{x} = l_{c0}\dot{\varepsilon}_c$ ce qui permet d'écrire

$ml_{c0}\ddot{\varepsilon}_c + S_f \eta l_{c0}\dot{\varepsilon}_c = S_f(\sigma_s - \sigma_c)$.

Q14/ Or $\sigma_s = E_s \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_c a}{1-a}$, donc

$ml_{c0}\ddot{\varepsilon}_c + S_p \eta l_{c0}\dot{\varepsilon}_c + \dfrac{S_p E_s a}{1-a}\varepsilon_c = \dfrac{S_p E_s}{1-a}\varepsilon - S_p \sigma_c$, de la forme $\ddot{\varepsilon}_c + 2\xi\omega\dot{\varepsilon}_c + \omega^2\varepsilon_c = \omega^2\alpha\varepsilon - \beta\sigma_c$.

Par identification $\omega^2 = \dfrac{S_f E_s a}{ml_{c0}(1-a)}$, $\alpha = \dfrac{1}{a}$, $\beta = \dfrac{-S_f}{ml_{c0}}$, $\xi = \dfrac{S_f \eta}{2\omega m} = \dfrac{\eta}{2}\sqrt{\dfrac{S_f l_{c0}(1-a)}{mE_s a}}$

En remplaçant la masse $m = \rho_m S_f l_{p0} = \rho_m S_f l_{c0}/a$:

$\omega = \sqrt{\dfrac{E_s a^2}{\rho_m l_{c0}^2 (1-a)}}$; $\alpha = \dfrac{1}{a}$, $\beta = \dfrac{-a}{\rho_m l_{c0}^2}$, $\xi = \dfrac{\eta}{2}\sqrt{\dfrac{(1-a)}{\rho_m E_s}}$.

2.4 Modèles volumiques du coeur

Q15/ Volumes des fibres $V_m = 2\pi R_g H_g e$ et volume du sang $V_g = \pi R_g^2 H_g = \pi R_g^2 H_{g0}$.

Q16/ $e = V_m/(2\pi R_g H_{g0}) = V_{m0}/(2\pi R_g H_{g0})$ varie en $1/R_g$: $e = e_0 R_{g0}/R_g$

Q17/ En assimilant la circonférence à nl_c, on obtient $\varepsilon = \dfrac{2\pi R_g - 2\pi R_{g0}}{2\pi R_{g0}} = \dfrac{R_g}{R_{g0}} - 1$, soit

$R_g = R_{g0}(1+\varepsilon)$. On en déduit le volume intérieur $V_g = \pi R_g^2 H_{g0} = \pi R_{g0}^2 H_{g0}(1+\varepsilon)^2$.

Lors d'une contraction, le volume intérieur varie de

$V_g - V_{g0} = \pi R_{g0}^2 H_{g0}(1+\varepsilon)^2 - \pi R_{g0}^2 H_{g0} = \pi R_{g0}^2 H_{g0}(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)$.

Le débit est donc en notant f la fréquence des battements : $Q_g = f\left|V_g - V_{g0}\right| = fV_{g0}\left|\varepsilon^2 + 2\varepsilon\right|$

Q18/ En appliquant le principe de la statique à un système constitué d'un demi cylindre de muscle et du sang contenu dans ce demi cylindre, on obtient le bilan des forces $2H_{g0}e\sigma - p2R_g H_{g0} = 0$, d'où

$\sigma = \dfrac{R_g}{e}p = \dfrac{R_g^2}{R_{g0}e_0}p$. or $R_g = R_{g0}(1+\varepsilon)$ donc $\sigma = \dfrac{R_{g0}(1+\varepsilon)^2}{e_0}p$. On identifie

$K_\sigma = \dfrac{R_{g0}(1+\varepsilon)^2}{e_0}$.

Q19/ L'entrée du système est la fonction d'activation u.

On garde la relation donnée après Q7 : $\frac{d\sigma_c}{dt} = -\lambda_c \sigma_c \left|\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right| + \upsilon_c \frac{d\varepsilon_c}{dt} + k_c u$ (fonctionnement de EC).

L'équation de la question 11 : $\sigma = \left(\frac{E_s \varepsilon}{1-a} + \frac{E_p}{\lambda_p}\left(e^{\lambda_p \varepsilon} - 1\right)\right) - \frac{aE_s}{1-a}\varepsilon_c$ (ressorts ES et EP)

L'équation différentielle de Q14 : $\ddot{\varepsilon}_c + 2\xi\omega\dot{\varepsilon}_c + \omega^2\varepsilon_c = \omega^2\alpha\varepsilon - \beta\sigma_c$ (eq mouvement)

Il faut pouvoir trouver σ, σ_c, ε_c et ε (4 inconnues 3 équations).

*** Il manque une équation. Utiliser une équation décrivant le reste du système circulatoire ?

On en déduit le débit avec le résultat de la question 17 : $Q_g = f\left|V_g - V_{g0}\right| = fV_{g0}\left|\varepsilon^2 + 2\varepsilon\right|$

Et la pression avec la relation de la question 18 : $\sigma = K_\sigma p$.

3 LA CIRCULATION SANGUINE

3.1 L'écoulement sanguin

Q20/ Pour le débit cardiaque indiqué de 5,7L par minute, on exprime le débit dans l'aorte (unique)

$Q_A = 5,7\,10^{-3}/60 \approx 1.10^{-4} m^3.s^{-1}$

La vitesse de l'écoulement dans l'aorte est donc $v_A = Q_A/(\pi r_A^2) = 1,2 m.s^{-1}$.

Le débit dans un capillaire est $Q_C = Q_A/1.10^9$, d'où une vitesse $v_C = Q_C/(\pi r_C^2) = 2.10^{-3} m.s^{-1}$.

Q21/ $\mathrm{Re} = \frac{\rho_s (2r_c) V_C}{\mu_s} = 10^6.8\,10^{-6}.2\,10^3 = 16.10^{-3} << 2000$

L'écoulement est laminaire, le transfert de quantité de mouvement se fait principalement de façon diffusive.

Q22/ L'écoulement se produit dans la direction de l'axe des x, donc la vitesse est de la forme $\vec{V}(M,t) = v(r,\theta,x,t)\vec{x}$.

On suppose l'écoulement stationnaire, donc de la forme $\vec{V}(M,t) = v(r,\theta,x)\vec{x}$

L'écoulement est comme le capillaire invariant par rotation autour de Ox , donc $\vec{V}(M,t) = v(r,x)\vec{x}$.

Le sang étant incompressible, la conservation de la masse entraine $div\vec{V}(M,t) = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ donc la vitesse est de la forme $\vec{V}(M,t) = v(r)\vec{x}$.

Q23/ On choisit comme système le sang contenu dans le tronçon cylindrique de rayon *r* entre a et v. La résultante des forces de pression latérales est nulle par symétrie. Il reste les pressions sur les surfaces d'entrée et de sortie : $p_a \pi r^2 \vec{x} - p_v \pi r^2 \vec{x}$.

La force de viscosité est $\mu_s 2\pi r L_c \frac{dv}{dr}\vec{x}$, avec la dérivée $\frac{dv}{dr} < 0$.

Q24/ Le théorème de la résultante cinétique donne $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = (p_a - p_v)\pi r^2 \vec{x} + \mu_s 2\pi r L_c \frac{dv}{dr}\vec{x}$.

Donc $\frac{dv}{dr} = \frac{-(p_a - p_v)}{2\mu_s L_c} r = \lambda(p_e - p_s) r$ avec $\lambda = \frac{-1}{2\mu_s L_c}$.

Q25/ On intègre entre $r = a$ où la vitesse est nulle et une position quelconque :

$v(r) = \frac{\lambda}{2}(p_a - p_v)(r^2 - r_c^2)$.

On en déduit le débit à travers une section : $Q = \iint_{section} v(r)dr = \int_0^{r_c} v(r) 2\pi r dr = \frac{-\lambda\pi}{4}(p_a - p_v) r_c^4$,

Puis la résistance hydraulique $R_c = \frac{-4}{\lambda\pi r_c^4}$. (On retrouve $R_c = \frac{8\mu_s L_c}{\pi r_c^4}$)

Q26/ On admet l'expression suggérée par l'énoncé $P_m = \lambda_m L_c \pi r_c^2$.

Les forces de viscosité dues au tuyau ne travaillent pas. Le travail des forces de pression permet d'écrire $P_t = \int_0^{r_c} (p_a - p_v) 2\pi r v(r) dr) = (p_a - p_v) Q = R_c Q^2$

Donc $P = \lambda_m L_c \pi r_c^2 + R_c Q^2$

Q27/ $P = \lambda_m L_c \pi r_c^2 + \frac{8\mu_s L_c}{\pi r_c^4} Q^2$ est minimal pour $\frac{dP}{dr_c} = 2\lambda_m L_c \pi r_c - \frac{32\mu_s L_c}{\pi r_c^5} Q^2 = 0$, c'est-à-dire

$Q = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\lambda_m}{\mu_s}}\, r_c^3$. Par identification $K_Q = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\lambda_m}{\mu_s}}$

Q28/ A l'issue d'une bifurcation, le débit est divisé par 2 dans la branche fille, et donc il faut diviser le rayon par $\sqrt[3]{2}$ pour respecter le critère de minimisation de la puissance.

Quand on passe de l'aorte aux 40 grandes artères, le débit est divisé par 40.

Les rayons vérifient $\frac{r_{aorte}}{r_{grande\ artère}} = \frac{5}{1,5} = 3,3$.

Pour respecter le critère, les débits devraient vérifier $\frac{Q_{aorte}}{Q_{grande\ artère}} = 3,3^3 = 36$ ce qui est cohérent

avec le rapport déduit de la figure 13 : $\frac{Q_{aorte}}{Q_{grande\ artère}} = 40$.

3.2 Prise en compte de l'élasticité des vaisseaux sanguins

Q29/ Conservation de la masse pendant dt, et donc du volume car le sang est incompressible :

$Q_e(t)dt - Q_s(t)dt = v^*(t+dt) - v^*(t) = \frac{dv^*}{dt}(t)dt$ donc $Q_e(t) - Q_s(t) = \frac{dv^*}{dt}(t)$.

Q30/ La résistance hydraulique permet d'écrire en régime quasi-stationnaire $Q_s = \frac{p^* - p_s}{R_a}$.

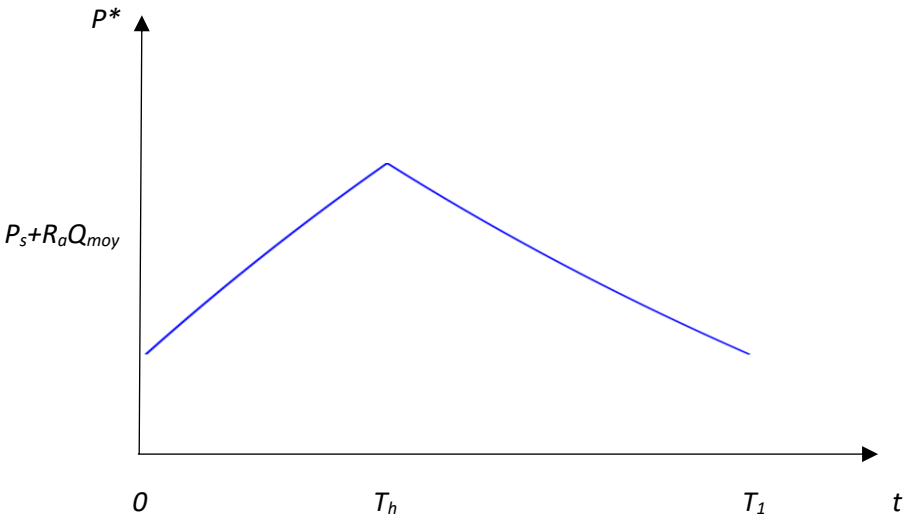
D'autre part, la compliance permet d'écrire $v^* = C_a p^*$.

En remplaçant dans l'équation de conservation de Q29, $Q_e = \frac{p^* - p_s}{R_a} + C_a \frac{dp^*}{dt}$,

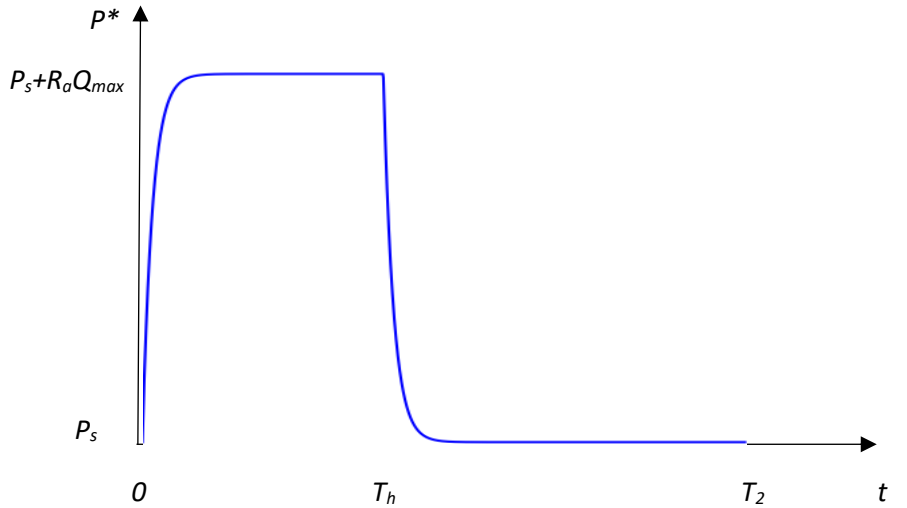
$$p^*(t) + R_a C_a \frac{dp^*}{dt}(t) = p_s + R_a Q_e(t)$$

Q31/ Débit moyen $Q_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T Q_e(t)dt = \frac{T_h}{T} Q_{\max}$

Le cas $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{10}{\tau_a}$ correspond à une période $T_1 \approx 0,6\tau_a$: la réponse est constituée de débuts de branches exponentielles.



Le cas $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{1}{10\tau_a}$ correspond à une période $T_2 \approx 60\tau_a$: la réponse est constituée de branches exponentielles.



Q32/

$$\underline{Z} = \frac{R_a}{1 + jR_a C_a \omega} + \frac{jR_s L_s \omega}{R_s + jL_s \omega}$$

Q33/ D'après Q2, la pulsation cardiaque est dans l'intervalle compris entre 4 rad.s^{-1} et 20 rad.s^{-1}, soit la zone centrale du coupe bande. A une pulsation voisine de 6 rad.s^{-1}, soit une fréquence de 1Hz=60 battements/mn correspondant au repos, l'amplitude de la pression sera minimale. En absence d'effet inertiel, on aurait un simple passe-bas d'ordre 1 (cf. l'équation de la Q30), en l'amplitude de pression diminuerait à un rythme élevé. (Sous réserve de la valeur de la pulsation caractéristique $1/R_a C_a$).

4 LE SYSTEME NERVEUX AUTONOME

4.1 Echantillonnage numérique et principe de discrétisation

Q34/ La période d'échantillonnage est ΔT donc la fréquence d'échantillonnage est $F_E = \frac{1}{\Delta T}$.

La plus haute fréquence de fondamental de signal cardiaque est $f_M = 250/60 = 4,2Hz$.

Or d'après le théorème de Nyquist-Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois la fréquence maximale des signaux à échantillonner : $F_E = \frac{1}{\Delta T} > 2 f_M$ donc $\Delta T < \frac{1}{2 f_M} = \Delta T_{\max}$

AN : $\Delta T_{\max} = \frac{1}{2 f_M} = \frac{1}{2 \times 250/60} = \frac{60}{500} = 0,12s$.

Q35/ Relations de récurrence vérifiées par $Y_n = y(T_n)$ et $\dot{Y}_n = y'(T_n)$ avec un schéma d'Euler explicite :

$\dot{Y}_n = \dot{Y}_{n-1} + \Delta T.(X_{n-1} - bY_{n-1} - a\dot{Y}_{n-1})$

$Y_n = Y_{n-1} + \Delta T.\dot{Y}_{n-1}$

Les codes à compléter ensuite font penser à un schéma d'Euler implicite qui utiliserait les relations

$\dot{Y}_n = \dot{Y}_{n-1} + \Delta T.(X_n - bY_n - a\dot{Y}_n)$

$Y_n = Y_{n-1} + \Delta T.\dot{Y}_n$

Q36/ A partir de la fonction de transfert de la figure 22 :

$\underline{p}_b\left(1 + j\omega\tau_b\right) = K_b \underline{p}_a$ soit l'équation différentielle vérifiée par $p_a(t)$ et $p_b(t)$:

$\tau_b \frac{dp_b}{dt}(t) + p_b(t) = K_b p_a(t)$.

Q37/ La relation de récurrence se déduit de $\frac{dp_b}{dt}(t) = \frac{K_b p_a(t) - p_b(t)}{\tau_b}$ en utilisant un schéma d'Euler explicite : $\frac{Pb_n - Pb_{n-1}}{\Delta T} = \frac{K_b Pa_{n-1} - Pb_{n-1}}{\tau_b}$ soit

$$Pb_n = Pb_{n-1} + \Delta T \frac{K_b Pa_{n-1} - Pb_{n-1}}{\tau_b} = \left(1 - \frac{\Delta T}{\tau_b}\right) Pb_{n-1} + \frac{\Delta T.K_b}{\tau_b} Pa_{n-1}$$

Q38/

```
def(n, Pa, Pb, tau, K, DT):
    Pb[n]=(1-DT/tau)*Pb[n-1]+K*DT/tau* Pa[n-1]
```

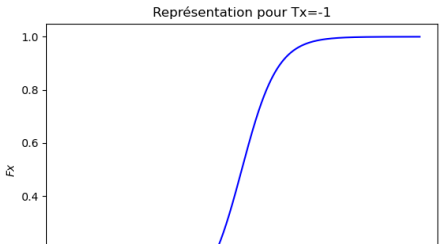
4.3 Modélisation des effecteurs

Q39/

La courbe C_{-1}^{0} correspond à $F_x(Pb)=\frac{1}{1+e^{-Pb}}$.

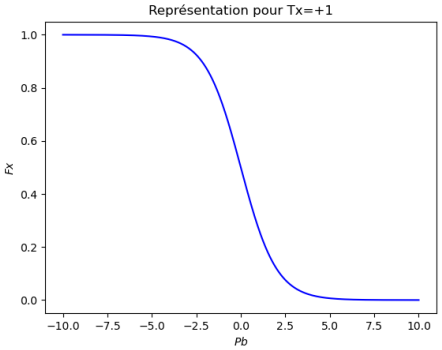
Elle a deux asymptotes horizontales:

$F_x(Pb) \xrightarrow[Pb\to-\infty]{} 0$ et $F_x(Pb) \xrightarrow[Pb\to+\infty]{} 1$



La courbe C_{+1}^{0} correspond à $F_x(Pb)=\frac{1}{1+e^{+Pb}}$. Il y a deux asymptotes horizontales:

$F_x(Pb) \xrightarrow[Pb\to-\infty]{} 1$ et $F_x(Pb) \xrightarrow[Pb\to+\infty]{} 0$

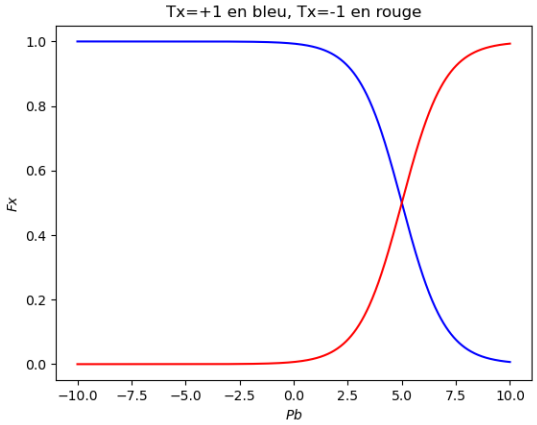


Q40/

P_x^0 est un seuil auquel comparer P_b.

L'utilisation d'une fonction de type sygmoïde permet de réaliser la comparaison avec une progressivité au voisinage du seuil.

Le signe de T_x permet de choisir le sens de la comparaison. $T_x=-1$ donne une sortie qui diminue quand P_b augmente tandis que $T_x=+1$ donne une sortie qui varie dans le mêmes sens que P_b.



Q41/

```
def sygmoide(n, Pb, Fx, ax, bx, Tx, P0x):
    Fx[n]=ax+bx/(1+np.exp(Tx*(P[n]-P0x))
```

Q42/ On a besoin de l'entier le plus proche

```
def retard_discret(n, X, Y, rt, DT):
    i = n-round(rt/DT)
    if i <0 :
        Y[n] = X[0]  # on conserve la valeur initiale
    else:
        Y[n]=X[i]
```

Q43/ $V_{i+\alpha}=V_i+\alpha(V_{i+1}-V_i)$

Q44/ On a cette fois besoin de l'entier immédiatement inférieur

```
def retard_lin(n, X, Y, rt, DT):
    i=n-int(rt/DT)
    alpha=(rt/DT-i)
    Y[n]=X[i]+alpha*(X[i+1]-X[i])
```

Q45/ DT ne fait pas partie des arguments mais est défini comme variable globale

```
def IPFM(n, X, PulseC, It, R):
    Itn=It+DT*X[n]
    if Itn>=R:
        PulseC[n]=1  # impulsion
        return 0     # remise à zéro de l'intégrale
    else
        PulseC[n]=0  # inutile si tableau initialisé à 0
        return Itn   # nouvelle valeur de l'intégrale
```

4.4 Identification et validation du modèle

Q46/ Pas certain d'être exhaustif

```
class ParametresSNA:
    # parametre du filtre de pression arterielle
    tau_b = 0. # constante du temps
    K_b = 0.   # gain barorecepteur
    # parametres de la voie vagale ou v est subsitue à x
    a_v = 0.   # a_x
    b_v, P0_v, T_v = 0., 0., 0.
    # parametres de la voie sympathique ou s est subsitue à x
    a_s , b_s, P0_s, T_s = 0., 0., 0., 0.
    # retards des deux voies
    R_V, R_s = 0., 0.
    # paramètres du passe bas voie vagale
    K_v, tau_v = 0., 0.
    # paramètres du passe bas voie sympathique
    K_s, tau_s = 0., 0.
    # consigne IPFM
    R = 0.
```

Q47/

```
def SNA(n:int,s:Signau×SNA,p:ParametresSNA):
    # Filtrage de la pression arterielle
    passe_bas_gain(n, s.Pa, s.Pb, p.tau_b, p.K_b, s.DT)
    # Sélection par les sygmoïdes
    sygmoide(n, s.Pb, s.SFv, p.a_v, p.b_v, p.T_vx, p.P0_v)
    sygmoide(n, s.Pb, s.SFs, p.a_s, p.b_s, p.T_vs, p.P0_s)
    # Retards
    retard_lin(n, s.SFv, s.Srv, p.R_v, s.DT)
    retard_lin(n, s.SFs, s.Srs, p.R_s, s.DT)
    # Filtrages
    passe_bas_gain(n, s.Srv, s.Sv, p.tau_v, p.K_v, s.DT)
    passe_bas_gain(n, s.Srs, s.Ss, p.tau_s, p.K_s, s.DT)
    # Sommes des voies vagale et sympathique
    s.Sc = s.Sv+ s.Ss
    # Génération des impulsions
    IPFM_lin(n, s.Sc, s.PulseC, s.It, p.R)
```

Q48/ On exploite la valeur moyenne et l'amplitude.

$P_M = 100mmHg$ et $\Delta P = 20mmHg$

Le gain du passe-bas de la figure 22 est $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_b^2}}$.

D'après la question 2, l'intervalle de pulsation est $4rad.s^{-1} < \omega < 20rad.s^{-1}$, donc $8 < \omega\tau_b < 40$.

L'amplitude de $p_b(t)$ à la plus basse fréquence est donc $\frac{1}{\sqrt{1+8^2}}20 = 2,5$ (l'unité du signal barométrique n'est pas précisée)

L'amplitude de $p_b(t)$ à la plus haute fréquence est donc $\frac{1}{\sqrt{1+40^2}}20 = 0,5$.

Comme la pression moyenne $P_M = 100mmHg$ est transmise sans atténuation, et que $0,5 < 2,5 << 100$, on peut en conclure que le filtre sert à détecter la pression sanguine moyenne.

Q49/ $S_c = S_v + S_s$ permet d'identifier que S_c est représenté par la courbe B.

Pour le système sympathique, le signal augmente avec la pression artérielle (cf. introduction de 4.3). On en déduit que les courbes (C, E,F,) sont associées au système sympathique et (A,D,G) au système vagal.

Le retard pour la voie vagale est 0,2s, on en déduit que S_v^f est représenté par la courbe G et S_v^r par D. La courbe A représente S_v, légèrement atténuée (K_v=0,8), retardée et lissée en sortie du passe-bas.

Le retard pour la voie sympathique est 3s, on en déduit que S_s^f est représenté par la courbe C et S_s^r par F. La courbe E représente S_s, retardée et lissée en sortie du passe-bas.

Résumons: S_v^f, S_v^r, S_v, S_s^f, S_s^r, S_s, S_c correspondent respectivement à G, D, A, C, F, E, B

A	B	C	D	E	F	G
S_v	S_c	S_s^f	S_v^r	S_s	S_s^r	S_v^f

Q50/ Il s'agit d'un problème d'optimisation : trouver les paramètres qui permettent au modèle d'approcher "au mieux" les données. On peut évoquer une généralisation de méthode des moindres carrés, pas forcément évidente à mettre en œuvres notamment pour des équations non linéaires. Plutôt qu'un modèle paramétrique, on pourrait essayer une modélisation dite "d'intelligence artificielle" utilisant les réseaux de neurones. L'inconvénient des réseaux de neurones est que l'on n'a pas d'explication du détail du mécanisme amenant au résultat, même si ce résultat est performant.