PSI

CALCUL NUMÉRIQUE

1) a) Calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$.

b) Calculer : $A_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

2) a) Calculer pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx)$.

b) Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \sin^2(2k-1)x$.

3) On se propose de montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

a) En développant $(1+X)^{2n}$ de 2 façons.

b) En utilisant deux parties disjointes fixées à n éléments d'un ensemble à $2n$ éléments .

4) On considère tous les nombres obtenus en permutant les chiffres 1,2,3,4,5,6.

a) Combien y-a-il de tels nombres ?

b) On les range par ordre croissants. Quel est le rang de 362145 ? Quel est le 500-ième nombre ?

c) Montrer qu'aucun de ces nombres n'est premier, ni un carré parfait.

d) Quelle est la somme de ces nombres ?

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$ **b)** $z^6 - (3-2\,\mathrm{i})z^3 + 2 - 2\,\mathrm{i} = 0$ **c)** $8z^2 = \overline{z}$

d) Pour $n \geqslant 2$, $(z-i)^n = (z+i)^n$ **e)** $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n + \cdots + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0.$

6) Linéariser : **a)** $\cos^n x$ **b)** $\cos^4 x \sin^2 x$

7) Trouver le lieu $\mathcal{L}$ des points M d'affixe z tels que $\left(\frac{z-i}{z}\right)^2$ soit réel.

8) Soit $f : \mathbb{C} - \{\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ et $F : \mathcal{P} - \{I\} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M(z) \longmapsto M'(f(z))$
où $\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien et I le point d'affixe i.

a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Démontrer que : $\forall\, z \in \mathbb{C} - \{\mathrm{i}\}$, $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

c) Déterminer les nombres complexes z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

d) Déterminer l'image par F du cercle de centre I et de rayon R.

e) Déterminer l'image par F de la droite passant par I et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1+\mathrm{i})$.