PSI **PROBABILITÉS**

1) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
Ecrire avec les opérations ensemblistes $-$ $\cap$, $\cup$ et *complémentaire*- les évènements suivants :

a) L'un au moins des évènements A, B ou C est réalisé.

b) L'un et seulement l'un des évènements A ou B est réalisé.

c) Les deux évènements A et B sont réalisés et C ne l'est pas.

d) Tous les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés.

e) L'un au moins des évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé.

f) Une infinité d'évènements parmi les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés.

g) Seul un nombre fini d'évènements parmi les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé.

h) Tous les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réalisés à partir d'un certain rang.

2) On cherche un objet dans un meuble qui a 8 tiroirs.
La probabilité qu'il se trouve dans le meuble est p.
On ouvre successivement 7 tiroirs différents sans le trouver.
Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans le dernier tiroir ?

3) On lance deux dés jusqu'à ce qu'une somme égale à 5 ou 7 apparaisse.

a) Soit E_n : « une somme égale à 5 apparait au $n-$ième double lancer et sur les $n-1$ premiers lancers ni la somme de 5 ni celle de 7 ne sont apparues ». Calculer $P(E_n)$

b) Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme égale à 5.

c) Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme égale à 7.

d) Trouver la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais.

4) Une succession d'individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non »
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

5) On dispose d'un trousseau de n clés indifférentiables pour ouvrir une serrure.

a) L'expérience a lieu dans le noir et, à chaque essai, on utilise une clé choisie au hasard.
Quelle est, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'ouvrir la serrure au $p-$ième essai ?

b) A présent, on a une lampe de poche et on essaie successivement toutes les clés.
Quelle est maintenant la probabilité d'ouvrir la serrure au $p-$ième essai ?

6) On lance n pièces de monnaie, la probabilité que la $k-$ième pièce amène *pile* valant $\dfrac{1}{2k+1}$.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de *piles* ?

7) a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un *six* ?

b) Même question avec deux dés pour obtenir un *double six*.

8) On effectue une suite de lancers indépendants de pièces de monnaie.
A chaque lancer la pièce donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles lors de deux lancers consécutifs.
Pour $n \geqslant 1$, on note U_n l'évènement : « on obtient pour la première fois deux piles de suite aux lancers n et $n+1$ ».
On note A_n l'évènement : « les n premiers lancers ne donnent pas deux piles de suite et le $n-$ième lancer donne pile ».
On note B_n l'évènement : « les n premiers lancers ne donnent pas deux piles de suite et le $n-$ième lancer donne face ».
On pose $\quad u_n = P(U_n), \quad x_n = P(A_n), \quad y_n = P(B_n)$

a) Déterminer x_i, y_i et u_i pour $i \in [\![1,3]\!]$.

b) Pour $n \geqslant 1$, trouver une relation simple entre x_n et u_n.

b) Pour $n \geqslant 1$, déterminer les probabilités conditionnelles : $\quad P(A_{n+1} \mid A_n), \quad P(A_{n+1} \mid B_n), \quad P(B_{n+1} \mid A_n), \quad P(B_{n+1} \mid B_n)$

d) En déduire que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = py_n \quad$ et $\quad y_{n+1} = q\,(x_n + y_n)$

e) On suppose $\quad p = \dfrac{1}{2}$. $\quad$ Trouver une relation de récurrence entre y_{n+1}, y_n et y_{n-1}.
En déduire, pour $n \geqslant 1$, une expression de x_n puis de u_n en fonction de n.
Vérifier que $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 \quad$ et en donner une interprétation.

9) Des boules en nombre infini numérotées 1,2, ...sont placées successivement et indépendamment les unes des autres dans 3 boites.

a) Pour $k \geqslant 2$, $\quad$ on note A_k l'évènement :
« deux des trois boites sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $k-$ième boule »
Calculer $\quad P(A_k) \quad$ puis $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$. $\quad$ Interpréter.

b) Pour $l \geqslant 3$, $\quad$ on note B_l l'évènement :
« les trois boites sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la $l-$ième boule »
Calculer $\quad P(B_l \mid A_k)$, $\quad$ en déduire $\quad P(B_l) \quad$ puis $\quad \displaystyle\sum_{l=3}^{+\infty} P(B_l)$. $\quad$ Interpréter.

10) Une puce évolue sur trois cases C_1, C_2, C_3.
A l'instant $t = 0$ elle est en C_1 puis se déplace de manière aléatoire sur les cases de la manière suivante :
- Si elle est en C_1 ou C_2 au temps $t = n$, elle va sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité.
- Si elle est en C_3 au temps $t = n$, elle y reste.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :
- E_n : « La puce est sur la case C_1 à l'instant n »
- F_n : « La puce est sur la case C_2 à l'instant n »
- G_n : « La puce est sur la case C_3 à l'instant n »

On pose $\quad u_n = P(E_n), \quad v_n = P(F_n), \quad w_n = P(G_n)$

a) Etablir une realtion de récurrence entre $\quad u_{n+1}, \quad v_{n+1}, \quad w_{n+1} \quad$ et $\quad u_n, \quad v_n, \quad w_n$.

b) Calculer w_n en fonction de n et déterminer $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$. $\quad$ Que peut-on en déduire ?

11) Deux joueurs A et B s'affrontent en des parties indépendantes.
Le joueur A dispose d'une fortune égale n euros et le joueur B dispose d'une fortune égale $N - n$ euros.
A chaque tour , le joueur A a la probabilité $\quad p \in]0,1[\quad$ de l'emporter. $\quad$ On note $\quad q = 1 - p$
Le joueur perdant donne un euro au vainqueur. $\quad$ Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.
On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte losque sa fortune vaut n.

a) Que valent a_0 et a_N ? $\quad$ Etablir la formule de récurrence :

$$\forall\, n \in [\![1, N-1]\!], \quad a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$$

b) Calculer a_n.

c) Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.