PSI

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES DISCRÈTES

1) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules successivement avec remise où $1 \leqslant n \leqslant N$.
X est la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré et Y celle égale au plus petit numéro tiré.

a) Déterminer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ rendant compte de l'expérience. Donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

b) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X \leqslant k)$ et $P(Y \geqslant k)$.

c) En déduire les lois de X et de Y.

2) On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne pile pour la deuxième fois.
On suppose qu'à chaque lancer de la pièce, la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.
On note X le nombre de faces obtenues avant d'obtenir pile pour la deuxième fois.
Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire au hasard l'une de ces boules.
On note alors Y le numéro de la boule tirée et $Z = X - Y$

a) Quelle est la loi de X ? X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

b) Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

c) Déterminer la loi de Z. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

3) On prend n boites numérotées de 1 à n. La boite numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une boite puis on tire une boule. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boite choisie, et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

a) Calculer la loi du couple (X, Y) et $P(X = Y)$.

b) Calculer la loi de Y et son espérance.

4) On considère une variable aléatoire discrète N qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Si la variable N prend la valeur n, on décide de procéder à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p avec $0 < p < 1$.
On note S et E les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de succès et d'échecs dans ces n épreuves.

a) Montrer que les variables S et E suivent des lois de Poisson de paramètre à déterminer.

b) Montrer que S et E sont indépendantes.

5) Un individu joue avec une pièce.
A chaque lancer la pièce donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
Dans un premier temps , il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile.
On note N le nombre de lancers nécessaires.
Dans un deuxième temps, si le premier pile est apparu au $n-$ième lancer, il lance cette même pièce n fois et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

a) Déterminer la loi du couple (N, X).

b) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$ et $P(X = 0) = \dfrac{q}{1+q}$

c) Montrer que X a la même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable aléatoire de Bernoulli et l'autre une variable aléatoire géométrique de même paramètre p' qu'on précisera.

d) En déduire l'espérance et la variance de X.

7) Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

et Y la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par : $\forall\, \omega \in \Omega,\quad \begin{cases} Y(\omega) = 0 & \text{si} \quad X(\omega) \quad \text{est impair} \\ Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si} \quad X(\omega) \quad \text{est pair} \end{cases}$

a) On suppose que X suit une loi géométrique. Trouver la loi de Y, son espérance et sa variance.

b) Même question si X suit une loi de Poisson.

8) Soit r un entier naturel non nul.
Une urne contient des boules blanches et noires, la proportion de boules blanches étant p avec $0 < p < 1$.
On note $q = 1 - p$.
On effectue une infinité de tirages d'une boule dans l'urne, la boule tirée étant remise après chaque tirage.
Les tirages sont numérotés dans $\mathbb{N}^*$.
On définit la variable aléatoire X_r égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir r boules blanches pour la première fois et à 0 si les tirages ne donnent jamais r boules blanches.
On définit la variable aléatoire Z_r égale au nombre de boules noires tirées avant l'obtention des r boules blanches et à -1 si on n'obtient jamais r boules blanches.

a) Déterminer la loi de X_r et en déduire que : $\forall\, r \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} = \frac{1}{p^r}$

On dit que X_r suit la loi de Pascal de paramètre (r, p)

b) Montrer que X_r admet une espérance et la calculer.

c) Montrer que X_r admet une variance et la calculer.

d) Trouver une relation liant les variables aléatoires X_r et Z_r.

e) En déduire la loi de Z_r puis montrer que Z_r admet une espérance et une variance et les calculer.

9) On désigne par N le nombre de champignons ramassés par un cueilleur durant une période fixée.
On suppose N à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on note G sa fonction génératrice.
On suppose aussi que la probabilité qu'un champignon cueilli soit comestible est p.
En faisant les hypothèses d'indépendance qui s'imposent, montrer que la probabilité pour que tous les champignons cueillis soit comestibles est $G(p)$.

10) Une société de locations de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louées ait un accident dans une journée est $0,004$ (la probabilité qu'une voiture louée ait plus d'un accident par jour est supposée nulle).
Les accidents sont supposés indépendants les uns des autres.
Chaque jour 1000 voitures de la société sont en circulation.
Soit N une variable aléatoire définie par le nombre de voitures de location de la société ayant un accident dans une journée.

a) Définir la loi de probabilité de N. Calculer son espérance et sa variance.

b) A l'aide d'une approximation justifiée, calculer la probabilité des évènements suivants :

i) Le nombre des accidents en une journée est égal à 4.

ii) Le nombre des accidents en une journée est au plus égal à 5, sachant qu'il est au moins égal à 2.

c) A l'aide de cette approximation, déterminer le plus petit entier k tel que $P(N > k) \leqslant 0,01$

11) Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes.
On suppose que pour tout i, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i avec $0 < p_i < 1$.
On note $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $t_n = \dfrac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$
Démontrer que : $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(|Y_n - t_n| \leqslant \varepsilon\right) = 1$