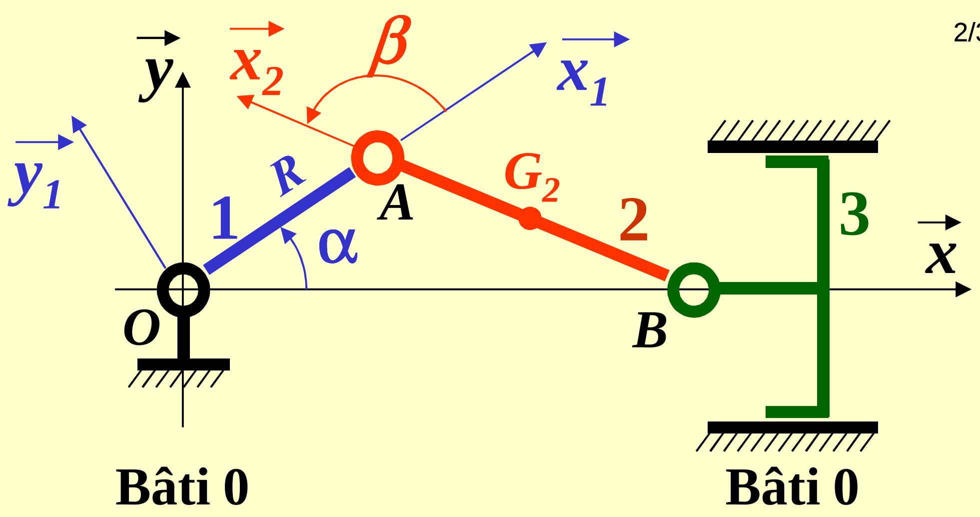
SYSTEME

BIELLE MANIVELLE

(calculs de puissances)

TEC appliqué à 1 seul



- **T (1/0)** $\qquad \dfrac{1}{2} J_{O\vec{z}}\, \dot{\alpha}^2$

- **P_{int}** $\qquad$ ***= 0 car pièce seule***

- **P_{ext}** $\rightarrow$ ***poids :*** $\quad$ ***OK***

$\rightarrow$ ***pivot en O :*** $P(0 \to 1/0) = 0$ ***car liaison parfaite avec bâti***

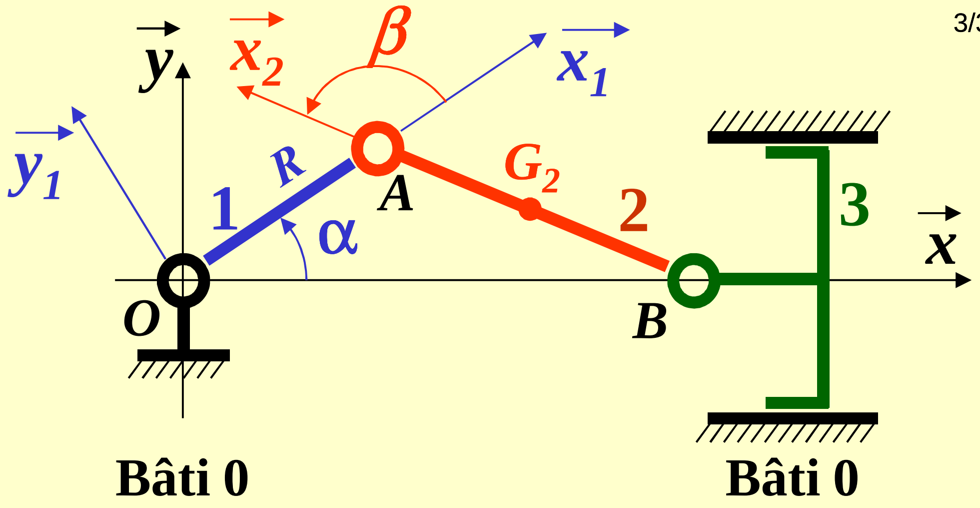
$$P(0 \to 1/0) = \{F(0 \to 1)\}_O \otimes \{V(1/0)\}_O = \left\{ \begin{pmatrix} X_{10} \\ Y_{10} \\ Z_{10} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} L_{10} \\ M_{10} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{O,B0} \otimes \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{O,B0} = 0$$

$\rightarrow$ ***pivot en A :*** ***liaison parfaite mais pas avec le bâti !***

$$P(2 \to 1/0) = \{F(2 \to 1)\}_A \otimes \{V(1/0)\}_A = \left\{ \begin{pmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} L_{21} \\ M_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{A,B1} \otimes \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}}_{\boxed{\overrightarrow{\Omega_{1/0}}}} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}}} \right\}_{A,B1}$$

$$= \boxed{R\dot{\alpha} Y_{21} \neq 0}$$

TEC appliqué à (1+2)



T (1/0) $\quad \frac{1}{2} J_{O\vec{z}}\, \dot{\alpha}^2$

T (2/0)

$$T(2/0) = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{2/0}}}_{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{z}_i} \;;\; \underbrace{\overrightarrow{V_{G_2\in 2/0}}}_{\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} + \overrightarrow{G_2A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ m_2 \underbrace{\overrightarrow{V_{G_2\in 2/0}}}_{} \;;\; \underbrace{\overrightarrow{\sigma_{G_2\in 2/0}}}_{\tilde{I}\,(G_2,2)\,\overrightarrow{\Omega_{2/0}}} \right\}_{G_2}$$

P_{int} $\quad P(2 \leftrightarrow 1) = 0$ ***car liaison 2/1 parfaite***

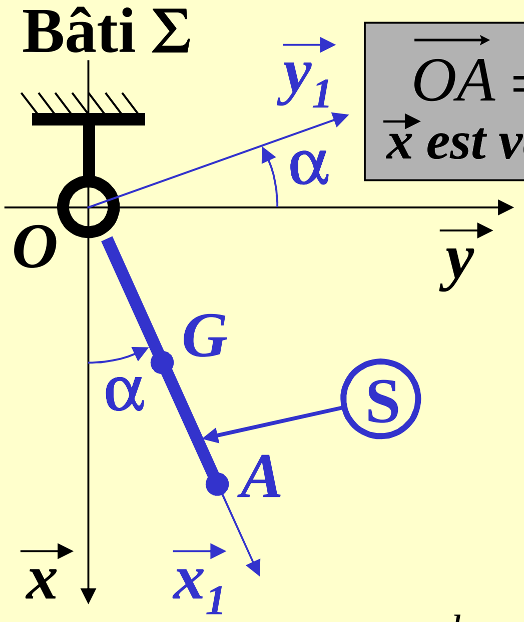
$$P(2 \leftrightarrow 1) = \{F(2 \to 1)\}_A \otimes \{V(1/2)\}_A = \left\{ \begin{pmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} L_{21} \\ M_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{A,B1} \otimes \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\Omega_{1/2}}} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}} \right\}_{A,B1}$$

$$= \boxed{0}$$

P_{ext} $\left\{ \begin{array}{l} \textit{poids de 1, poids de 2} \\ \textit{pivot en O, pivot en B} \end{array} \right.$

PENDULE SIMPLE

(comparaison PFD et TEC)



$\overrightarrow{OA} = l\,\vec{x}_1$
$\vec{x}$ est vertical

Utilisation du TEC

appliqué à la tige S /Σ

Calcul de l'énergie cinétique T(S/R)

Simple rotation autour d'un axe fixe dans R

$$T(S/R) = \text{"}\frac{1}{2} J\,\omega^2\text{"} = \boxed{\frac{1}{2} I_{O\vec{z}}\,\dot{\alpha}^2}$$

avec $$I_{O\vec{z}} = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \mu\,dx = \mu\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \mu\,\frac{l^3}{3} = \mu\,l\,\frac{l^2}{3} = \boxed{m\,\frac{l^2}{3}}$$

Puissance intérieure

pièce seule ⇒ $\boxed{P_{int} = 0}$

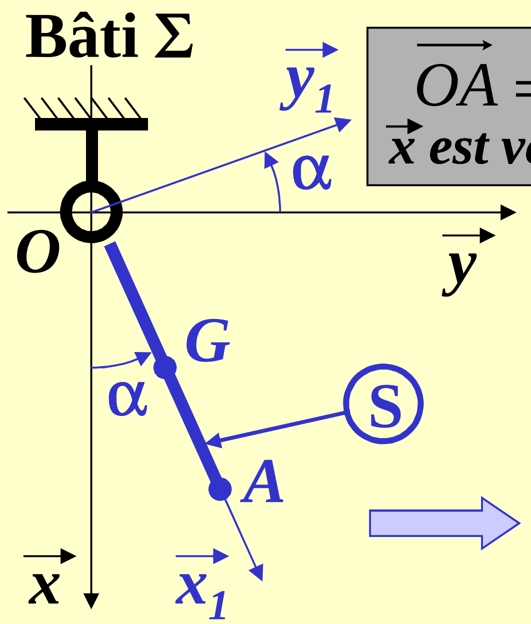
Puissance extérieure

→ **poids** $P(pes \rightarrow S/R) = \{F(pes \rightarrow S)\}_G \otimes \{V(S/R)\}_G$

$$= \{m\,g\,\vec{x}\ ;\ \vec{0}\}_G \otimes \{\dot{\alpha}\,\vec{z}\ ;\ \tfrac{l}{2}\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1\}_G = \tfrac{l}{2}\,m\,g\,\dot{\alpha}\,\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \boxed{-\tfrac{l}{2}\,m\,g\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha}$$

→ **pivot** *liaison parfaite (sans frottement) avec bâti* ⇒ $\boxed{P(\Sigma \rightarrow S/R) = 0}$

Conclusion



$\overrightarrow{OA} = l\,\vec{x}_1$
$\vec{x}$ est vertical

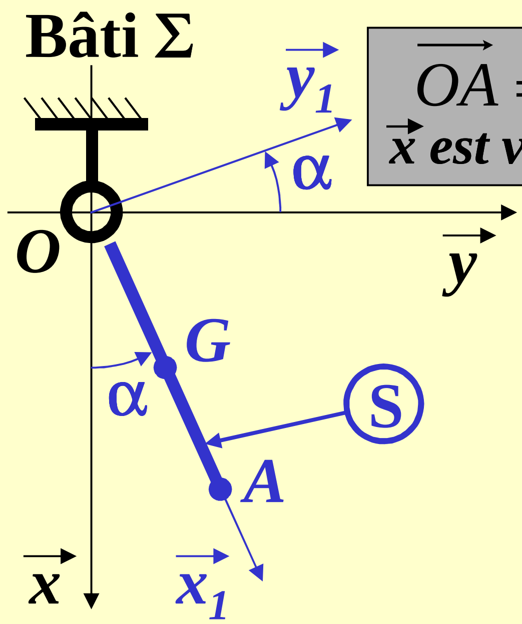
TEC $\Rightarrow$ $$\frac{d}{dt}(Ec) = \Sigma P\text{int} + \Sigma Pext$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\frac{l^2}{3}\,\dot{\alpha}^2\right) = 0 + \left(-m\,g\,\frac{l}{2}\,\dot{\alpha}\sin\alpha + 0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{m}\,\frac{l^{\cancel{2}}}{3}\,\cancel{2}\,\cancel{\dot{\alpha}}\,\ddot{\alpha} = -\cancel{m}\,g\,\frac{\cancel{l}}{2}\,\cancel{\dot{\alpha}}\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\frac{2l}{3}\,\ddot{\alpha} + g\sin\alpha = 0}$$

Pour trouver l'intégrale première il suffit de multiplier par $\dot{\alpha}$

$$\frac{2l}{3}\,\ddot{\alpha}\,\dot{\alpha} + g\,\dot{\alpha}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \frac{l}{3}\,\dot{\alpha}^2 - g\cos\alpha = cte \leftarrow$$ ***selon C.I.***



$\overrightarrow{OA} = l\,\vec{x}_1$

$\vec{x}$ **est vertical**

Utilisation du PFD

1) Isoler : *la tige S*

2) BAME : *poids, pivot en O*

3) PFD : *écrivons les 6 équations avec les moments en O*

➡ **poids :** $\{F(pes \to S)\}_G = \{m\,g\,\vec{x}\ ;\ \vec{0}\}_G = \boxed{\{m\,g\,\vec{x}\ ;\ -\tfrac{1}{2}m\,g\,l\sin\alpha\ \vec{z}\}_O}$

➡ **pivot :** $\boxed{\{F(\Sigma \to S)\}_O = \left\{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} L \\ M \\ 0 \end{pmatrix}\right\}_O}$

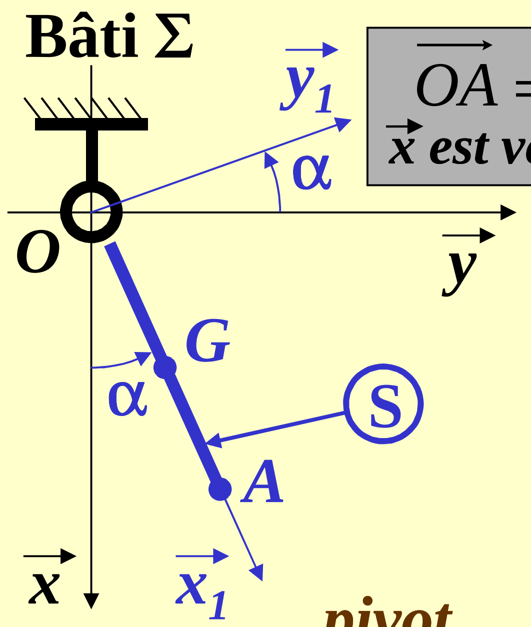
même forme dans R ou R_1

➡ **accélération de G :** $\overrightarrow{V_{G\in S/R}} = \tfrac{1}{2}\,l\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$ **d'où** $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} = \tfrac{1}{2}\,l\,\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \tfrac{1}{2}\,l\,\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1}$

➡ **moment dynamique en O (point fixe de S /Σ) :**

déjà calculé

$$\overrightarrow{\delta_{O,S/R}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{O,S/R}}\right)_{/R} = \frac{d}{dt}\left(J_{O\vec{z}}\,\dot{\alpha}\,\vec{z}\right)_{/R} = \boxed{\frac{m\,l^2}{3}\,\ddot{\alpha}\ \vec{z}}$$



$\overrightarrow{OA} = l\,\vec{x}_1$

$\vec{x}$ est vertical

Conclusion

Choix du repère d'écriture : R_1

$$m\,g\,\vec{x} = m\,g\cos\alpha\;\vec{x}_1 - m\,g\sin\alpha\;\vec{y}_1 \quad et \quad \vec{z}_1 = \vec{z}$$

pivot *poids*

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{lcl} X + m\,g\cos\alpha & = & -m\,\frac{l}{2}\,\dot{\alpha}^2 \\ Y - m\,g\sin\alpha & = & +m\,\frac{l}{2}\,\ddot{\alpha} \\ Z + 0 & = & 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lcl} L + 0 & = & 0 \\ M + 0 & = & 0 \\ 0 - \cancel{m}\,g\,\frac{\cancel{l}}{2}\sin\alpha & = & +\cancel{m}\,\frac{l^{\cancel{2}}}{3}\,\ddot{\alpha} \end{array}\right.\end{array}\right.$$

effort au palier variable

$$\boxed{\frac{2l}{3}\,\ddot{\alpha} + g\sin\alpha = 0}$$