Association de deux machines à courant continu (Centrale PSI)

Deux machines à courant continu M_1 et M_2, à aimants permanents, considérées comme identiques, sont associées sur le même arbre mécanique, selon le schéma de la figure 1.

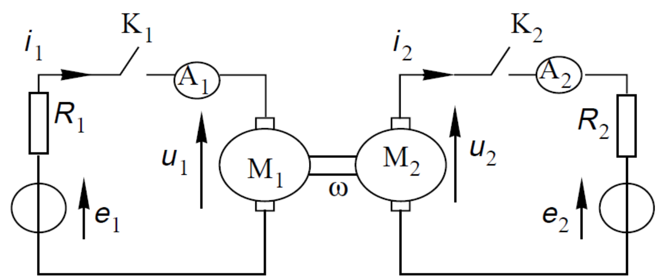


Figure 1 : association de deux machines à courant continu

Chaque machine est en relation électrique avec une source de tension, réversible en courant, modélisée par sa force électromotrice et une résistance (e_1 et R_1 pour le circuit 1 ; e_2 et R_2 pour le circuit 2). La vitesse de rotation angulaire est notée $\omega(t)$; elle est considérée comme positive lorsque la machine M_1 fonctionne en moteur avec $e_1 > 0$, et M_2 en génératrice. Chaque machine, dont on néglige l'inductance d'induit et dont la résistance d'induit est notée R, développe, lorsqu'elle tourne, une force électromotrice $e_m = \Phi_0\omega$, comme le montre le schéma équivalent de la figure 2.

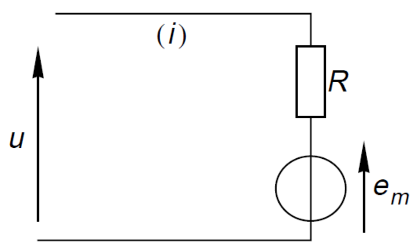


Figure 2 : schéma électrique

Dans la partie traitée ici, la machine M_1 fonctionne en moteur, donc $i_1 > 0$, et la machine M_2 fonctionne en génératrice avec $e_2 = 0$, donc $i_2 > 0$. Les pertes autres que celles dues à l'effet Joule sont modélisées, *pour l'ensemble des deux machines*, par un couple de frottement visqueux de la forme $-f\omega$.

II.B - K_2 est fermé, $e_2 = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 100\,\Omega$. Le moment d'inertie de l'ensemble des parties tournantes des deux machines vaut $J = 1{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. On considère un régime transitoire correspondant à K_1 fermé et $e_1 > 0$.

II.B.1) Exprimer l'équation différentielle liant ω et i_1 ; montrer que pour le moteur M_1, la génératrice M_2 débitant sur la résistance R_2 présente un couple de même nature qu'un frottement visqueux. On notera f_T la valeur absolue du coefficient global de frottement visqueux.

II.B.2) Écrire l'équation liant e_1, i_1 et ω.

II.B.3) On note $\Omega(p)$, $I_1(p)$ et $E_1(p)$ les représentations symboliques respectives des grandeurs $\omega(t)$, $i_1(t)$ et $e_1(t)$. Déduire des résultats des deux questions précédentes les fonctions de transfert :

$$H_i(p) = \frac{I_1(p)}{E_1(p)} \; ; \; H_\Omega(p) = \frac{\Omega(p)}{E_1(p)}.$$

Les essais suivants ont été effectués :

Essai 1 : Rotor bloqué (machines maintenues à l'arrêt)

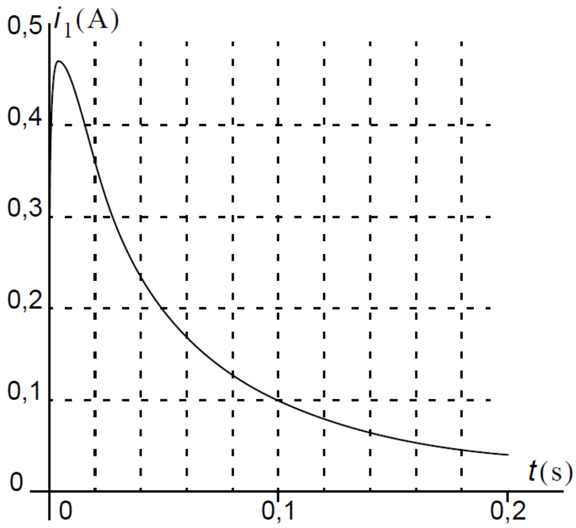
$e_1 = E_1(\mathrm{V})$	$1,00$	$3,00$	$6,00$
$i_1 = I_1(\mathrm{A})$	$0,167$	$0,50$	$1,01$

Essai 2 : K_2 ouvert

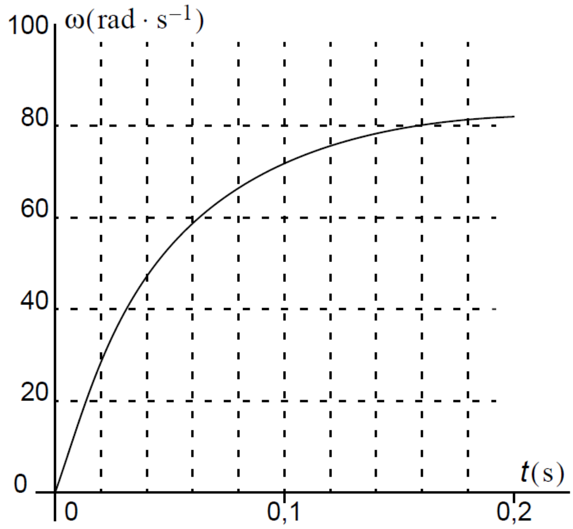
$e_1 = E_1(\mathrm{V})$	$2,00$	$4,00$	$6,00$
vitesse angulaire $(\mathrm{tr} \cdot \mathrm{min}^{-1})$	584	1169	1753

Essai 3 : K_1 et K_2 ouverts. À l'instant initial, la vitesse angulaire est 1700 tours par minute et on observe une décroissance qui amène la vitesse angulaire à 850 tours par minute au bout de $6,9\ \mathrm{s}$.

Essai 4 : K_1 et K_2 sont fermés mais le groupe est au repos car $e_1 = 0$. On applique alors au système une tension $e_1(t)$ ayant la forme d'un échelon d'amplitude $E_1 = 3,0\ \mathrm{V}$. Les évolutions au cours du temps de l'intensité du courant i_1 et de la vitesse angulaire ω sont données ci-dessous.



évolution du courant



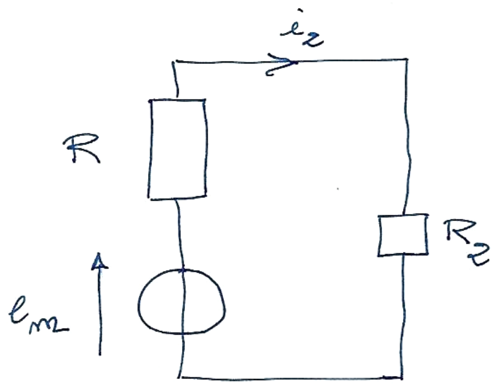
évolution de la vitesse angulaire

II.C -

II.C.1) L'allure de $i_1(t)$ proposée est-elle compatible avec la modélisation précédente ? Dans le cas contraire, préciser comment diffère l'évolution au cours du temps et proposer une interprétation.

II.C.2) L'évolution de $\omega(t)$ proposée est-elle compatible avec la modélisation précédente ? Dans le cas contraire, préciser comment diffère l'évolution au cours du temps et proposer une interprétation.

II.D - À partir des essais précédents, en détaillant la démarche suivie et en faisant figurer, si nécessaire, les constructions graphiques utilisées, évaluer numériquement les paramètres R, f, Φ_0 et f_T. On rappelle que le moment d'inertie de l'ensemble des parties tournantes des deux machines vaut $J = 1,0 \times 10^{-5} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.



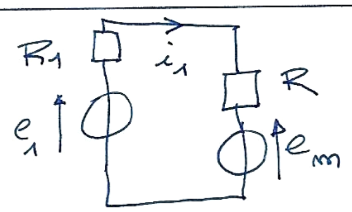
$$J\frac{d\omega}{dt} = \phi_0 i_1 - \phi_0 i_2 - f\omega$$

soit $$J\frac{d\omega}{dt} = \phi_0 i_1 - \frac{\phi_0^2}{R+R_2}\omega - f\omega$$

ou encore $$J\frac{d\omega}{dt} = \phi_0 i_1 - f_T\,\omega \quad (2)$$

avec $$f_T = \frac{\phi_0^2}{R+R_2} + f.$$

$$\begin{cases} e_m = (R+R_2)\, i_2 \\ \text{et } e_m = \phi_0\, \omega \end{cases}$$



$e_1 = (R_1+R)\, i_1 + \phi_0\, \omega$ (1), car $e_m = \phi_0 \omega$.

et ici $R_1 = 0$

$$\begin{cases} J p\, \Omega(p) = \phi_0 I_1(p) - f_T\, \Omega(p) \quad (2') \\ E_1(p) = R\, I_1(p) + \phi\, \Omega(p) \quad (1') \end{cases}$$

$$H_i(p) = \frac{1}{\dfrac{\phi_0^2}{f_T + pJ} + R}$$

$$H_\Omega(p) = \frac{1}{\phi_0 + \dfrac{R}{\phi_0}(pJ + f_T)}$$

---

*1 $i_1(t)$ correspond à un second ordre sur la courbe.

*2 $H_i(p) \longrightarrow RJ\dfrac{di_1}{dt} + (\phi_0^2 + R f_T)\, i_1 = J\dfrac{de_1}{dt} + f_T\, e_1$.

Or $de_1/dt = 0$ et $e_1 =$ cte : Donc i_1 correspond à un 1er ordre avec le modèle.

Donc : incohérence. Il faut prendre en compte l'inductance pour $t < t_{Imax}$.

$\overset{1}{*}$ $\Omega(t)$ correspond à un 1^{er} ordre sur le graphe

$\overset{2}{*}$ $H_\Omega(p) \longrightarrow RJ\dfrac{d\omega}{dt} + (\phi_o^2 + Rf_T)\,\omega(t) = \phi_o e_1$

avec $e_1 = E_1$ on a bien un 1^{er} ordre.

Si on veut résoudre complètement il faut $i_1(0^+)$ et $\omega(0^+)$. Or avec notre modèle $i_1(t)$ n'est pas continu, mais $\omega(t)$ oui, en $t=0$, car l'inertie mécanique l'impose.

Donc $\omega(0) = 0$ et, avec (1), $i_1(0^+) = \dfrac{E_1}{R}$.

On déduit après calculs :

$$i_1(t) = \frac{E_1}{R}e^{-t/\tau} + \frac{f_T E_1}{\phi_o^2 + Rf_T}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\omega(t) = \frac{\phi_o E_1}{\phi_o^2 + f_T R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right);\ \tau = \frac{RJ}{\phi_o^2 + f_T R}.$$

Essai 1 : Machines à l'arrêt $\Rightarrow \omega(t) = 0$. et $E_1 = RI_1$.
on trace E_1 en f^n de $I_1 \longrightarrow R = 6\,\Omega$.

Essai 2 et 3 : K_2 ouvert $\Rightarrow i_2 = 0 \Rightarrow f_T = f$.

Essai 3 : K_1 ouvert $\Rightarrow i_1 = 0$ et $J\dfrac{d\omega}{dt} = -f\omega$ soit
$\omega = \omega_o e^{-t/\tau'}$, $\tau' = J/f$ et $\dfrac{J}{f} = 6{,}9 / \ln\dfrac{1700}{850}$ et $f = 10^{-6}$ Js.

Essai 2. $\overset{1}{*}$ $\phi_o I_1 = f\Omega$ $\quad i_2 = 0$ et $d\omega/dt = 0$.

$\overset{2}{*}$ $E_1 = \phi_o\Omega + RI_1$

soit $E_1 = \left(\phi_o + \dfrac{Rf}{\phi_o}\right)\Omega$; on trace E_1 f^n de Ω

et $\phi_o + \dfrac{Rf}{\phi_o} = 3{,}4\,10^{-3}$ V/min/tour^{-1}. D'où $\phi_o = 0{,}03$ Wb.
et $f_T = 9{,}5\,10^{-6}$ Js.