BARRIERE DE PARKING SOUTERRAIN - CORRIGE

Question 1 :

Théorème du moment dynamique en D appliqué à 3 : $\vec{\delta}_{D,3/0} = \sum \vec{M}_{D,ext\to 3}$ **(1)**

La barre 3 est de masse négligeable donc son moment dynamique est nul : $\vec{\delta}_{D,3/0} = \vec{0}$

Moments des actions mécaniques s'exerçant sur 3 :

Action de l'avant bras 2 : $\vec{M}_{C,2\to 3} = \vec{0}$ (liaison rotule parfaite).

Action du bâti 0 : $\vec{M}_{D,0\to 3} = \vec{0}$ (liaison rotule parfaite).

Action de la pesanteur : inexistante la masse étant négligeable.

L'équation (1) donne : $\vec{M}_{D,0\to 3} + \vec{M}_{D,2\to 3} = \vec{0}$

$\vec{M}_{D,2\to 3} = \vec{M}_{C,2\to 3} + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{R}_{2\to 3} = \vec{0} + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{R}_{2\to 3} = \vec{0}$

d'où $\overrightarrow{DC} \wedge \vec{R}_{2\to 3} = \vec{0}$ donc $\vec{R}_{2\to 3}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DC}$ qui est par ailleurs de direction $\vec{x}_1$.

d'où $\boxed{\{F_{2\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{en C et dans } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$ (glisseur de support DC).

Question 2 :

Théorème du moment dynamique appliqué à 2 par rapport à l'axe $(B, \vec{z}_0)$:

$\vec{\delta}_{B,2/0}.\vec{z}_0 = \sum \vec{M}_{B,ext\to 2}.\vec{z}_0$ **(2)**

$\vec{\delta}_{B,2/0}.\vec{z}_0 = (\vec{\delta}_{G_2,2/0} + \overrightarrow{BG_2} \wedge m_2\vec{\Gamma}_{G_2/0}).\vec{z}_0$; $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0}$ donc $\vec{\delta}_{G_2,2/0} = \vec{0}$

$\vec{V}_{G_2,2/0} = \vec{V}_{B,2/0} = 2r\dot{\theta}\,\vec{y}_1$ (2 en translation circulaire par rapport à 0)

$\vec{\Gamma}_{G_2/0} = \left(\dfrac{d\vec{V}_{G_2/0}}{dt}\right)_{/0}$; $\boxed{\vec{\Gamma}_{G_2/0} = 2r\ddot{\theta}\vec{y}_1 - 2r\dot{\theta}^2\vec{x}_1}$

d'où $\vec{\delta}_{B,2/0}.\vec{z}_0 = (\overrightarrow{BG_2} \wedge m_2\vec{\Gamma}_{G_2/0}).\vec{z}_0 = \left(r\vec{x}_0 \wedge m_2(2r\ddot{\theta}\vec{y}_1 - 2r\dot{\theta}^2\vec{x}_1)\right).\vec{z}_0$

$\boxed{\vec{\delta}_{B,2/0}.\vec{z}_0 = 2r^2m_2\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)}$

Moments en B des actions mécaniques s'exerçant sur 2 :

Action du bras 1 : $\vec{M}_{B,1\to 2}.\vec{z}_0 = 0$ (liaison pivot parfaite).

Action de la barre 3 :

$\vec{M}_{B,3\to 2}.\vec{z}_0 = \vec{M}_{C,3\to 2}.\vec{z}_0 + (\overrightarrow{BC} \wedge \vec{R}_{3\to 2}).\vec{z}_0 = 0 + \left((-a\vec{x}_2 + a\vec{y}_2) \wedge -X_{23}\vec{x}_1\right).\vec{z}_0 = a(\sin\theta + \cos\theta)X_{23}$

Action de la pesanteur : $\vec{M}_{B,g\to 2}.\vec{z}_0 = \vec{M}_{G_2,g\to 2}.\vec{z}_0 + (\overrightarrow{BG_2} \wedge \vec{P}_2).\vec{z}_0 = 0 + \left(r\vec{x}_2 \wedge -m_2g\vec{y}\right).\vec{z}_0 = -rm_2g$

L'équation (2) donne : $2r^2m_2\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = a(\sin\theta + \cos\theta)X_{23} - rm_2g$

d'où : $\boxed{X_{23} = \dfrac{2r^2m_2\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) + r\,m_2g}{a(\sin\theta + \cos\theta)}}$

Question 3 :

Théorème de l'énergie cinétique (ou énergie-puissance) appliqué à l'ensemble (1+2+3).

$$\frac{d}{dt}E_{(1+2+3)/0} = \sum P_{ext\to(1+2+3)/0} + \sum P_{i\leftrightarrow j} \qquad \textbf{(3)}$$

Énergie cinétique dans leur mouvement par rapport à R_0 :

Du bras : $E_{1/0} = \frac{1}{2}\left(\vec{\Omega}_{1/0}.\vec{\sigma}_{A,1/0} + \vec{V}_{A,1/0}.m_1\vec{V}_{G_1/0}\right) = J_1\dot{\theta}^2$, (A est fixe dans R_0 : $\vec{\sigma}_{A,1/0} = J_1\dot{\theta}\vec{z}_0$)

De l'avant-bras : $E_{2/0} = \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_{G_2/0})^2 = \frac{1}{2}m_2(2r\dot{\theta})^2$, ($\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0}$)

De la barre 3 : $E_{3/0} = 0$ (masse négligeable)

Puissances développées par les actions extérieures agissant sur les différents solides dans leur mouvement par rapport au repère galiléen R_0 :

Par le bâti sur le bras : $P_{0\to1/0} = \vec{\Omega}_{1/0}.\vec{M}_{A,0\to1} + \vec{V}_{A,1/0}.\vec{R}_{0\to1} = \dot{\theta}\vec{z}_0(L_{01}\vec{x}_0 + M_{01}\vec{y}_0) + \vec{0}.\vec{R}_{0\to1} = 0$

Par le bâti sur la barre : $P_{0\to3/0} = \vec{\Omega}_{3/0}.\vec{M}_{B,0\to3} + \vec{V}_{B,3/0}.\vec{R}_{0\to3} = \dot{\theta}\vec{z}_0.\vec{0} + \vec{0}.\vec{R}_{0\to3} = 0$

Par la pesanteur sur le bras : $P_{g\to1/0} = \vec{P}_2.\vec{V}_{G_1/0} = -m_1g\,\vec{y}_0.r\dot{\theta}\,\vec{y}_1 = -m_1gr\dot{\theta}\cos\theta$

Par la pesanteur sur l'avant-bras : $P_{g\to2/0} = -m_2g\,\vec{y}_0.2r\dot{\theta}\,\vec{y}_1 = -2m_2gr\dot{\theta}\cos\theta$

Par la pesanteur sur la barre : $P_{g\to3/0} = 0$ (masse négligeable).

Par le moteur sur le bras : $P_{m\to1/0} = C_m\dot{\theta}$

Puissances développées par les actions mutuelles intérieures : les liaisons L_{23} et L_{12} étant parfaites ces puissances sont nulles.

L'équation (3) devient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(J_1\dot{\theta}^2 + m_2(2r\dot{\theta})^2\right) = C_m\dot{\theta} - m_1gr\dot{\theta}\cos\theta - 2m_2gr\dot{\theta}\cos\theta$$

$$J_1\dot{\theta}\ddot{\theta} + 4m_2r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = C_m\dot{\theta} - m_1gr\dot{\theta}\cos\theta - 2m_2gr\dot{\theta}\cos\theta \quad \boxed{C_m = (J_1 + 4m_2r^2)\ddot{\theta} + (m_1 + 2m_2)g\,r\cos\theta}$$

Question 4 :

Moment d'inertie d'une face x_1y_1 : $J_{11} = \int_0^{2r}\int_{-h}^{h}(x^2 + y^2)\mu e\,dy\,dx \approx \mu e\int_0^{2r} x^2\,2h\,dx = \frac{16\mu ehr^3}{3}$

Moment d'inertie d'une face x_1z_0 : $J_{12} = \int_0^{2r}(h^2 + x^2)\mu e(b-2e)\,dx \approx \int_0^{2r} x^2\mu e(b-2e)dx = \frac{8\mu e(b-2e)r^3}{3}$

$J_1 = 2J_{11} + 2J_{12} = \frac{16\mu er^3}{3}(2h + b - 2e)$; $m_1 = 2\mu(4reh + 2re(b-e)) = 4\mu re(2h+b-2e)$; $\boxed{J_1 = \frac{4m_1r^2}{3}}$