PSI* 2020 - 2021
DM N°4 - Vidange de la citerne (e3a 2016)
Corrigé

D/ Ecoulement parfait

D1. Les conditions pour appliquer la relation de Bernoulli sont, le long d'un tube de courant :
Ecoulement parfait, stationnaire (ici, c'est plutôt quasi-stationnaire), incompressible et homogène.
On peut ajouter qu'il ne faut pas qu'il y ait de pièce mobile le long du tube.

D2. Conservation de la masse donc du débit massique D_m= cte soit $\rho V_A S_A = \rho V_B S_B$ soit $\boxed{V_A S_A = V_B S_B}$.

D3. Comme $S_A >> S_B$, $V_A << V_B$.

On déduit alors de la relation de Bernoulli, les pressions en A et B étant égales à P_0, que $\boxed{V_B = \sqrt{2gh}}$.

D4. $V_B = V_A \dfrac{S_A}{S_B}$ or $V_A = -\dfrac{dh}{dt} \Rightarrow \sqrt{2gh} = -\dfrac{dh}{dt}\dfrac{S_A}{S_B}$. En séparant les variables et en intégrant entre 0 et T, on obtient : $\boxed{T = \dfrac{S_A}{S_B}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}}$ soit avec H = 1m : $\boxed{T = 451s = 7\,\text{min}\,31s}$

E/ Prise en compte d'une perte de charge singulière

E1. En adoptant une démarche analogue, donc en négligeant toujours V_A et avec $P_A = P_B$, on obtient :

$$\boxed{V_B = \sqrt{\frac{2gh}{1+K_C}}}$$

E2. Par une méthode identique à D4 : $\boxed{T' = \sqrt{1+K_C}.T = 561s = 9\,\text{min}\,21s}$.

Le temps de vidange augmente à cause de la viscosité du fluide, c'est normal.

F/ Prise en compte d'une perte de charge régulière

F1. Bilan de quantité de mouvement pour le système{cylindre}.

En régime stationnaire pour un système fermé $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \sum \vec{F}_{ext}$.

Les forces sont rappelées dans l'énoncé : forces pressantes en C_1 et C_2 (les forces pressantes latérales s'annulent par symétrie), le poids et les forces visqueuses, soit en projection sur (Oz) :

$0 = p_{C1}\pi r^2 - p_{C2}\pi r^2 - \rho g(z_2 - z_1)\pi r^2 + \eta \dfrac{dV}{dr} 2\pi r l$, d'où la relation de l'énoncé avec : $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{2\eta l}}$.

Supposons V(r)>0, il faut alors $\mathring{p}_{C1} > \mathring{p}_{C2}$. α> 0, la vitesse décroit avec r, elle est maximale au centre (r= 0) et nulle en r = a, par adhérence aux parois. Le signe de α est donc cohérent.

F2. Le terme $\alpha\left(\mathring{p}_{C1} - \mathring{p}_{C1}\right)$ne dépend pas de r. En intégrant l'équation de la question précédente et en utilisant la condition liée à l'adhérence du fluide visqueux $V(a) = 0$, on obtient : $V(r) = \dfrac{\alpha\left(\mathring{p}_{C1} - \mathring{p}_{C2}\right)a^2}{2}\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$ soit $\boxed{V_{\max} = \dfrac{\alpha\left(\mathring{p}_{C1} - \mathring{p}_{C2}\right)a^2}{2}}$.

F3. $Q_V = \int V(r).dS = \int_0^a V(r).2\pi r dr = \dfrac{\pi a^2}{2} V_{\max}$ soit $\boxed{Q_V = \dfrac{\pi\alpha\left(\mathring{p}_{C1} - \mathring{p}_{C2}\right)a^4}{4}}$

F4. Par définition $Q_V = \pi a^2 V_{moy}$ d'où $\boxed{V_{moy} = \dfrac{V_{\max}}{2} = \dfrac{\alpha\left(\mathring{p}_{C1} - \mathring{p}_{C2}\right)a^2}{4}}$

F5. En utilisant la question précédente pour exprimer la perte de charge, on a :

$\Delta p_r = \frac{4V_{moy}}{\alpha a^2} = \frac{8\eta l V_{moy}}{a^2} = \lambda \frac{1}{2}\rho V_{moy}^2 \frac{l}{2a}$ d'après l'énoncé soit $\boxed{\lambda = \frac{32\eta}{a\rho V_{moy}}}$.

F6. $R_e = \frac{\rho V_{moy} d}{\eta}$ d'où $\boxed{\lambda = \frac{64}{R_e}}$.C'est la relation que l'on trouve dans le diagramme de Moody pour Re < 2000.

F7. $R_e = 27.10^3$.

F8. $R_e > 2.10^3$, l'écoulement est donc turbulent et non laminaire, l'hypothèse est non valide.

G/ Remplissage du réservoir d'une voiture

G1. $K_{total} = K_C$ (partie E) $+2K_{Coudebrusque} + K_{pompe} + K_{coudearrondi} = 0,55 + 2*3/2 + 6 + 0,091 = \boxed{9,7}$.

G2. $\Delta p_{s,tot} = K\frac{1}{2}\rho V_{moy}^2 = \boxed{83.10^3 Pa} = 0,83 bar$.

G3. $\Delta p_{r,tot} = \lambda \frac{1}{2}\rho V_{moy}^2 \frac{l}{2a} = \boxed{58.10^3 Pa} = 0,58 bar$.

G4. La section $S_B = \pi a^2$ est la même dans tout le circuit, la vitesse moyenne également (fluide incompressible). Le débit est donc : $Q_V = V_{moy}.S_B = 4,5.10^{-3} m^3/s$.

G5. En reprenant la formule de l'énoncé, on a, avec r le rendement :

$$P_e = \frac{P_u}{r} = \frac{Q_V}{r}\left(\frac{1}{2}\rho\left(V_E^2 - 0^2\right) + \rho g\left(z_E - z_A\right) + 0 + \Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot}\right) = \boxed{1,1 kW}$$