DM 4: Mécanique des fluides

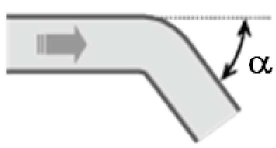
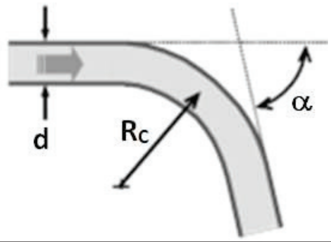
Ci-dessous , la seconde partie d'un sujet récent de PSI, traitant de la vidange d'un réservoir contenant du gazole.

Données numériques

Pour la seconde partie: H=1m

Section de la citerne au point A :	S_A = 1,00 m²
Section de l'ouverture au point B :	$S_B = 1{,}00.10^{-3}$ m²
Rayon des sections des conduites et des coudes :	a = 1,80 cm
Intensité du champ de pesanteur :	$g = 9{,}81$ m.s^{-2}
Masse volumique du gazole :	$\rho = 840$ kg.m^{-3}
Viscosité dynamique du gazole :	$\eta = 5.10^{-3}$ kg.m^{-1}.s^{-1}
Vitesse moyenne des les conduites :	$V_{moy} = 4{,}50$ m.s^{-1}

Coefficient K pour les pertes de charge singulière :

Coude brusque :	*Coude arrondi de rayon de courbure R_C et de diamètre d* (α est en degré) *:*
 $K = \sin^2\alpha + 2\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	 $K = \frac{\alpha}{180}.\left(0{,}131 + 1{,}847.\left(\frac{d}{R_C}\right)^{7/2}\right)$

DEUXIEME PARTIE
VIDANGE de la CITERNE

D / Ecoulement parfait

La citerne est munie d'un orifice par lequel le gazole peut s'écouler.
On suppose que toutes les conditions sont réunies pour qu'on puisse appliquer la relation de Bernoulli entre un point A de la surface libre du gazole et un point B au niveau de l'ouverture (voir figure ci-après) :

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_B^2 - V_A^2\right) + \rho g\left(z_B - z_A\right) + \left(p_B - p_A\right) = 0$$

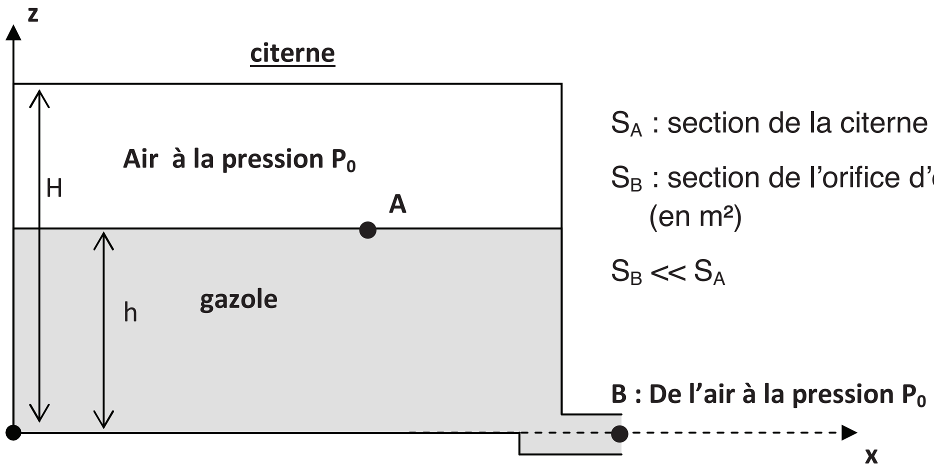
où

ρ est la masse volumique du gazole,

V_A (respectivement V_B) correspond à la vitesse moyenne (encore appelée vitesse débitante) de l'écoulement supposée constante au niveau de la section S_A (respectivement S_B),

p_A (respectivement p_B) correspond à la pression de l'écoulement supposée constante au niveau de la section S_A (respectivement S_B),

g est l'intensité du champ de pesanteur.



S_A : section de la citerne au niveau du point A (en m²)

S_B : section de l'orifice d'écoulement au niveau du point B (en m²)

$S_B \ll S_A$

D1. Quelles sont les conditions d'application de la relation de Bernoulli ?

D2. Comment se traduit la conservation de la masse lors de l'écoulement ?

En déduire une relation entre les vitesses moyennes en *A* et *B*.

D3. Sachant que la section en *A* est nettement plus grande que celle en *B*, exprimer la vitesse moyenne V_B de l'écoulement en *B* à l'aide de *h* et *g*.

D4. La citerne est initialement pleine.

Exprimer le temps nécessaire *T* pour la vidanger complètement, à l'aide de S_A, S_B, *H* et *g*.

Calculer *T*.

E / Prise en compte d'une perte de charge singulière

Au niveau du convergent (rétrécissement de section sur la ligne de courant AB), on constate une zone de perturbation caractérisée énergétiquement par une « perte de charge singulière » : le bilan d'énergie se traduit par une perte d'énergie mécanique volumique modélisable par la formule suivante :

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_B^2 - V_A^2\right) + \rho g\left(z_B - z_A\right) + \left(p_B - p_A\right) = -\frac{1}{2}K_C\rho V_B^2 \quad \text{avec } K_c \approx 0{,}55 \text{ (sans dimension)}$$

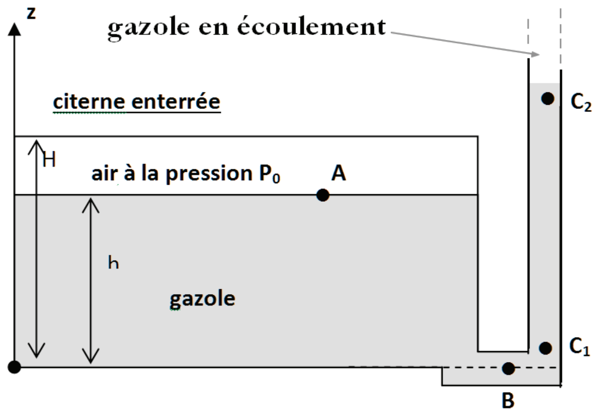
E1. Déterminer une nouvelle expression de V_B en tenant compte de la perte de charge singulière.

E2. Exprimer à nouveau le temps nécessaire *T'* pour vidanger complètement la citerne, à l'aide de *T* et K_c.

Calculer *T'*. Commenter.

F / Prise en compte d'une perte de charge régulière

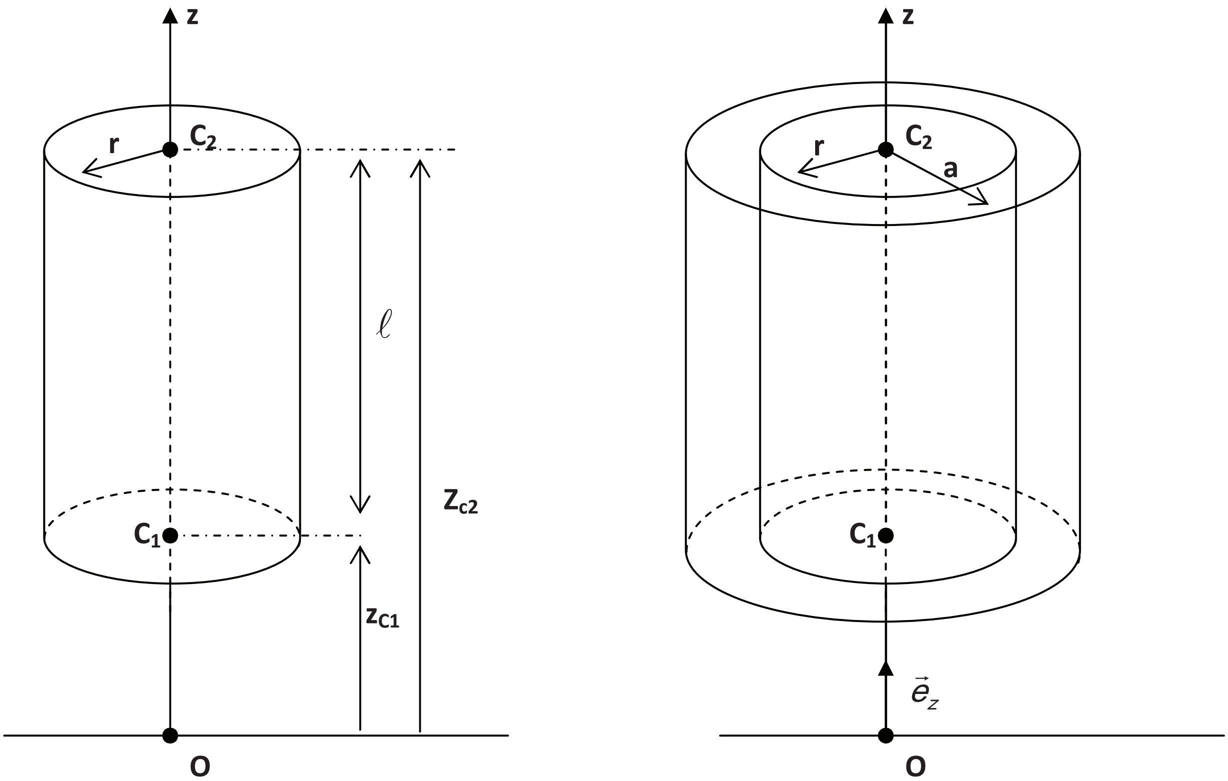
On accroche au niveau de B une conduite cylindrique verticale de grande longueur et de diamètre d = 2a. La figure ci-contre ne représente qu'une portion $\ell = C_1C_2$ de cette conduite.
L'étude de l'écoulement entre C_1 et C_2 nécessite alors la prise en compte de la dissipation d'énergie par frottement dû à la viscosité du gazole.
Dans la suite, on considère que le gazole est un fluide incompressible, de masse volumique constante ρ, de viscosité dynamique η, en écoulement stationnaire.



On suppose de plus que l'écoulement est laminaire et que le champ de vitesse est à symétrie cylindrique

$$\vec{V}(r) = V(r)\vec{e}_z$$

avec V(r) > 0 et une vitesse nulle le long des parois et maximale sur l'axe de la conduite. Les pressions sont supposées constantes pour une altitude donnée : p_{C1} est la pression en C_1 à l'altitude z_{C1}, p_{C2} est la pression en C_2 à l'altitude z_{C2}.



On isole par la pensée un cylindre de fluide de rayon r inférieur à a et de longueur ℓ. Ce cylindre subit des forces pressantes en C_1 et C_2, son poids et des forces visqueuses modélisées par la loi suivante :

$$\vec{f} = \eta \frac{dV}{dr} \Sigma\, \vec{e}_z$$

Où Σ représente la surface latérale de contact entre le fluide contenu dans le cylindre et celui à l'extérieur du cylindre.

Tournez la page S.V.P.

F1. Faire un bilan de quantité de mouvement pour ce cylindre et établir la relation suivante :

$$\frac{dV}{dr} = -\alpha \cdot \left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right) \cdot r$$

avec $\tilde{p} = p + \rho g z$ et α un facteur que l'on exprimera à l'aide de η et ℓ. Commentez le signe de α.

F2. Montrer que $V(r)$ s'écrit : $V(r) = V_{max}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$. Exprimer V_{max} à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right)$.

F3. Déterminer l'expression du débit volumique Q_V à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right)$.

F4. En déduire l'expression de la vitesse moyenne V_{moy} dans une section de la conduite (encore appelée vitesse débitante) à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right)$.

La « perte de charge régulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des frottements visqueux) est définie par $\Delta p_r = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 \frac{\ell}{d}$ *où* λ *est une constante sans dimension dépendant de la nature de l'écoulement et de la rugosité de la conduite,* ℓ *la longueur de la conduite et d son diamètre.*

On a par ailleurs: $\tilde{p}_{C_2} - \tilde{p}_{C_1} = -\Delta p_r$ pour une canalisation de section constante.

F5. Déterminer l'expression de λ à l'aide de η, ρ, V_{moy} et a.

F6. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds R_e pour une conduite cylindrique en fonction de son diamètre d, de la vitesse moyenne V_{moy}, de la masse volumique ρ et de la viscosité η.

Pour un écoulement laminaire, en déduire l'expression de λ à l'aide du nombre de Reynolds, R_e.

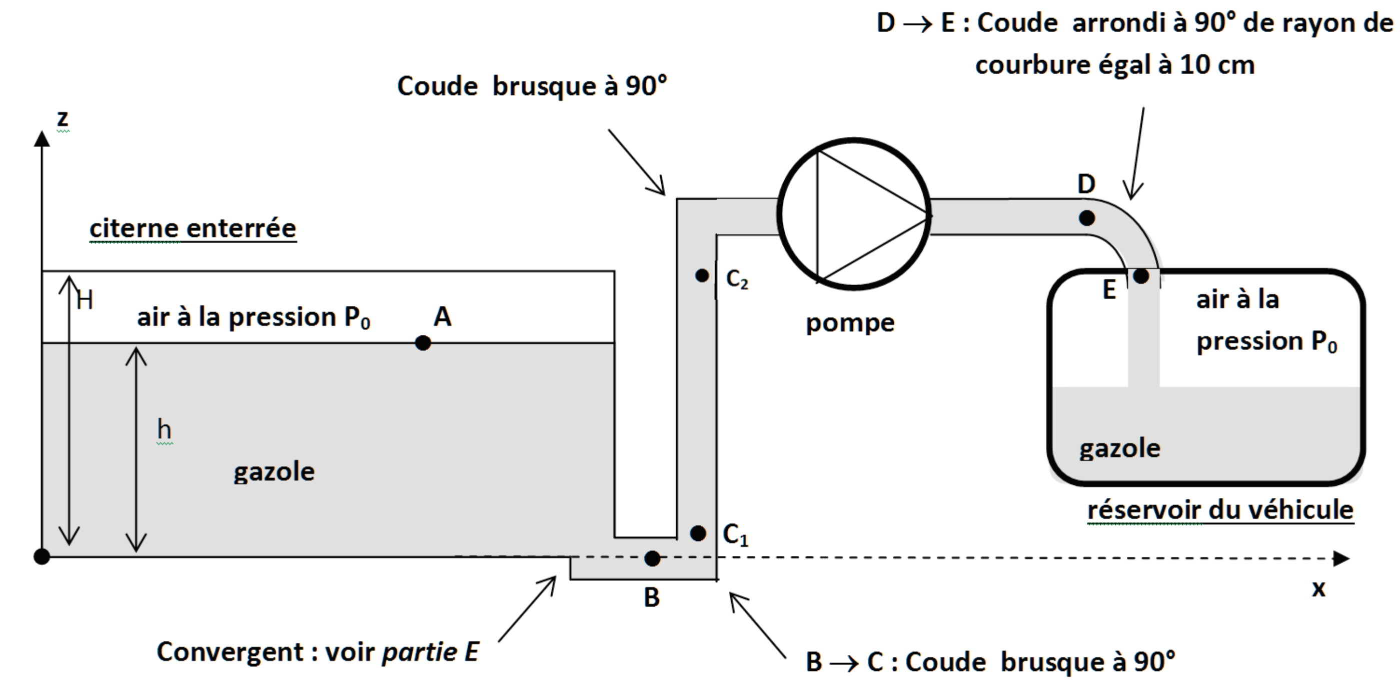
F7. Calculer le nombre de Reynolds R_e à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

F8. Rappeler comment le nombre de Reynolds, R_e peut être utilisé pour caractériser la nature de l'écoulement.

L'hypothèse d'écoulement laminaire utilisée jusqu'à la question **F7** est-elle valide ?

G / Remplissage du réservoir d'une voiture

On utilise une pompe centrifuge pour déplacer le gazole de la citerne au réservoir d'une voiture. Le schéma suivant modélise simplement le circuit du fluide (la citerne étant enterrée, on a bien évidemment $z_E > z_A$*)*
La « perte de charge singulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des coudes, des raccords entre canalisations de diamètres différents…) est définie par $\Delta p_s = K \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2$ *où K est une constante sans dimension dépendant de la nature de la singularité rencontrée. On admettra que la pompe utilisée ici génère une perte de charge singulière de coefficient* $K_{pompe} = 6$.



G1. Utiliser le document, page 12, intitulé « Données numériques » pour déterminer la valeur numérique du coefficient K_{total} correspondant à l'ensemble des singularités détaillées sur le schéma ci-dessus. On prendra soin de préciser les différents termes intervenant dans K_{total}.

G2. Calculer la valeur totale des pertes de charge singulières $\Delta p_{s,tot}$ à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

G3. La totalité des longueurs droites de la conduite vaut approximativement ℓ = 10 m.
On admettra la valeur suivante pour le coefficient de perte de charge régulière : $\lambda = 2{,}45.10^{-2}$.
Calculer la valeur totale des pertes de charge régulières $\Delta p_{r,tot}$ à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

L'insertion d'un élément actif (ici la pompe électrique) dans le circuit du fluide modifie le bilan énergétique appliqué au gazole. En tenant compte des pertes de charge, on admet la relation suivante appliquée entre les points A et E :

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_E^2 - V_A^2\right) + \rho g\left(z_E - z_A\right) + \left(p_E - p_A\right) = -\left(\Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot}\right) + \frac{P_u}{Q_V}$$

où P_u est la puissance utile fournie par la pompe au fluide et Q_V est le débit volumique.

G4. Calculer le débit volumique dans les conduites Q_V à l'aide des données numériques fournies.

G5. Sachant que la pompe a un rendement de 80%, déterminer l'expression de P_e, puissance électrique alimentant la pompe. Calculer P_e (on prendra $z_E - z_A \approx 5$ m).