Cahier de calcul

Pratique et entraînement avant l'entrée en Supbio

La suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Elle apparaît sous de nombreuses formes biologiques, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Présentation et mode d'emploi

En sciences, la technique et le calcul sont fondamentaux. L'expérience prouve que les étudiants arrivant en CPGE manquent souvent d'aisance en calcul, ce qui les pénalise parfois durablement. Le rythme de travail en CPGE est intense et vous manquerez l'an prochain de temps pour vous entraîner et combler certaines lacunes.

Pour être à l'aise l'année prochaine, vous devez donc pendant les vacances pratiquer et vérifier vos acquis à l'aide de ce cahier de calcul.

Il est d'autant plus impératif de travailler activement ce cahier si vous avez peu pratiqué les mathématiques l'année passée.

Ce cahier comporte, avec des liens en bleu permettant de passer rapidement d'une partie à l'autre :

- Un sommaire.
- Les fiches d'énoncés, avec les prérequis.
- Enfin, un corrigé détaillé.

Ce cahier est donc prévu pour être utilisé en autonomie.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : mélangez les thèmes en faisant quelques exercices par jour sur des sujets différents.

Profitez-en pour revoir régulièrement les cours correspondants.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : un peu chaque jour plutôt que plusieurs heures consécutives.

Attention à l'utilisation des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de les regarder.

Profitez de ces exercices pour repérer d'éventuelles difficultés et si vous le jugez nécessaire, entraînez-vous sur des exercices similaires. Nous pourrons répondre à vos questions à la rentrée. Puis vous serez évalués sur ces méthodes de calcul durant la première quinzaine de cours.

Bonnes vacances et à bientôt !

Les professeurs de Mathématiques

Sommaire

Fiche n°1 - Fractions

Prérequis : Règles de priorité et de calcul sur les fractions.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

1. $\dfrac{32}{40}$
2. $\dfrac{16\times 2+8}{4\times 5\times (5^2-3\times 7)}$
3. $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}$
4. $\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{12}$
5. $\dfrac{2}{3}-0,2$
6. $\dfrac{36}{25}\times\dfrac{15}{24}\times 5$
7. $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}}$
8. $\dfrac{2\times\dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2}}$
9. Un challenge : $\dfrac{0,5-\dfrac{3}{17}+\dfrac{3}{37}}{\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{17}+\dfrac{5}{37}}+\dfrac{0,5-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-0,2}{\dfrac{7}{5}-\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{3}-3,5}$.
10. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$
11. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n\,(n+1)}$
12. Pour $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{n+1}$

Voir la correction

Fiche n°2 - Puissances

Prérequis : Opérations sur les puissances, factorisation
$a^n a^p = a^{n+p}$; $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n+p}$; $(a^n)^p = a^{np}$; $a^n b^n = (ab)^n$; $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

2.1 Donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10

1. $10^5.10^3$
2. $\dfrac{10^5}{10^3}$
3. $\left(10^5\right)^3$
4. $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$
5. $\dfrac{20^5}{2^5}$
6. $5^{-3}.2^{-3}$
7. $\dfrac{\left(10^3\right)^{-5}.10^5}{10^3.10^{-5}}$
8. $0,001$
9. $\dfrac{1000.0,01^3}{0,1^3.100^2}$

2.2 Simplifier

1. $3^{-4}.5^{-4}.15^2$
2. $\dfrac{\left(30^4\right)^7}{2^{28}.5^{28}}$
3. $\dfrac{36^3.70^5.10^2}{14^3.28^2.15^6}$
4. $2^{21} + 2^{22}$
5. $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, $3^n + 4.3^{n+1} - 3^{n+2}$
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, $2.3^n + 4.3^{n-1} - 3^{n+1}$

Voir la correction

Fiche n°3 - Calcul littéral

Prérequis : Développer, factoriser, les identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

La variable x représente un nombre réel.

3.1 Développer et ordonner selon les puissances décroissantes de x

1. $(2x+1)(x-2)$
2. $(3x-1)^2 + (x-2)(x+2)$
3. $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$
4. $(x-1)\left(x^2+2x+3\right) - x(x+1)^2$
5. $(2x+1)(x-2) - 2x(x-3) - (x-3)^2$
6. $(x+2)^3$
7. $(2x-1)^3$
8. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$
9. $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$

3.2 Factoriser en reconnaissant une identité remarquable

1. x^2+2x+1
2. x^2-2x+1
3. $4x^2+4x+1$
4. x^2-6x+9
5. $4x^2+2x+\dfrac{1}{4}$
6. x^2-1
7. $9-4x^2$
8. x^2-5
9. $x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}$
10. $(2x-1)^2-9$
11. $(2x+3)^2-(x+1)^2$

3.3 Factoriser le plus possible

1. $6x^3-6x$
2. $(x+2)(x-1)+(x+2)(2x+3)$
3. $x(2x+1)-x^2+2x(x-3)$
4. $(6x+1)(6x-7)+36x^2-49$
5. $(3x+3)(x-1)-(x+1)(2x+1)$
6. x^3+2x^2+4x
7. x^2-x-6
8. $2x^2+x-1$
9. $6x^2-5x+1$

Voir la correction

Fiche n°4 - Racines carrées

Prérequis : Régles de calcul avec des racines carrées : pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad ; \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
Méthode : multiplier par la quantité conjuguée pour utiliser que $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$

4.1 Développer et/ou simplifier

1. $\left(2\sqrt{5}\right)^2$
2. $\left(2 + \sqrt{5}\right)^2$
3. $\left(3 + \sqrt{7}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{7}\right)^2$
4. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$
5. $\left(\dfrac{6 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2$
6. $\left(\sqrt{2} - 1\right)^4$
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n}}$

4.2 Écrire sous la forme $p\sqrt{n}$ avec p et n deux entiers naturels

1. $\sqrt{2} + \sqrt{8}$
2. $\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$
3. $3\sqrt{2} - \sqrt{50} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}$

4.3 Avec la méthode de la quantité conjuguée

1. $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$
3. $\dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dfrac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Voir la correction

Fiche n°5 - Exponentielles et logarithmes

Prérequis : Propriétés algébriques de la fonction exponentielle et du logarithme népérien.
Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $e^{a+b} = e^a + e^b \quad ; \quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \quad ; \quad (e^a)^n = e^{na}$
Pour $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n\ln(a)$
Et lien entre les deux fonctions : Pour $a \in \mathbb{R}$, $\ln(e^a) = a$ et pour $b \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\ln(b)} = b$

5.1 Calculer les nombres suivants en fonction de ln (2), $\ln(3)$ et $\ln(5)$

1. $\ln(16)$
2. $\ln(36)$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$
4. $\ln(0,125)$
5. $\ln(72) - 2\ln(3)$
6. $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$
7. $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$

5.2 Simplifier le plus possible

1. $\ln\left(e^{-1}\right)$
2. $e^{3\ln(2)}$
3. $e^{-2\ln(3)}$
4. $e^{\ln(3)-\ln(2)}$
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
6. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{2}}\right)^2$
7. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+e^{-x}} + \dfrac{1}{1+e^x}$
8. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) - 2\ln(\sqrt{x})$

Voir la correction

Fiche n°6 - Dérivation

Prérequis : Dérivées des fonctions usuelles.
Différentes formules de dérivation : $(f+g)'$, $(f\times g)'$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$, $(g^n)'$, $\left(\sqrt{g}\right)'$, $(\ln(g))'$, $(\exp(g))'$

Dériver les fonctions suivantes, puis mettre au même dénominateur, factoriser, simplifier (sans se préoccuper des problèmes de dérivabilité)

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = x\sqrt{x}$
3. $f(x) = x\ln(x) - x$
4. $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
5. $f(x) = x^2e^{-x}$
6. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
7. $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$
8. $f(x) = \left(x^2+1\right)^5$
9. $f(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{x}$
10. $f(x) = e^{x^2\ln(x)}$
11. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$
12. $f(x) = x\sqrt{2x+1}$
13. $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+2}$
14. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$
15. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
16. $f(x) = \sqrt{x}\,(2x+1)^3$
17. $f(x) = e^{2x}(x-1)^2$
18. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x+1}$
19. $f(x) = \dfrac{2x+1}{e^{2x}+1}$
20. $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Voir la correction

Fiche n°7 - Signe d'une expression

Prérequis : Mettre au même dénominateur, factoriser.
Connaître le signe des fonctions usuelles.
Déterminer le signe d'une fonction polynomiale du second degré.
Utiliser la règle des signes et éventuellement un tableau de signes.

Déterminer le signe des fonctions suivantes sur l'ensemble donné

1. $f(x) = x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
3. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$
4. $f(x) = (e^x - 1)\left(x^2 + 3x - 10\right)$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1} - 1$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$
6. $f(x) = \dfrac{x+1}{x} - 2$ sur $\mathbb{R}^*$
7. $f(x) = 1 - \dfrac{2x(x+1)}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$

Voir la correction

Fiche n°8 - Calcul d'intégrales

Prérequis : Déterminer une primitive.
Calcul d'une intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$, où F désigne une primitive de f sur $[a, b]$

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{1}^{3} (2x-5)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^5 - x^4\right)\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(e^{2x} + x\right)\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Voir la correction

Corrections

Correction de la fiche n°1 - Fractions

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

1. $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times 4}{8\times 5}=\boxed{\dfrac{4}{5}}$

2. $\dfrac{16\times 2+8}{4\times 5\times(5^2-3\times 7)}=\dfrac{32+8}{20\times(25-21)}=\dfrac{40}{80}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

3. On simplifie puis met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{6}-\dfrac{2}{6}=\boxed{\dfrac{1}{6}}$

4. On essaie de trouver le dénominateur commun le plus petit possible :
$\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{3}{4\times 2}-\dfrac{5}{4\times 3}=\dfrac{3\times 3}{4\times 2\times 3}-\dfrac{5\times 2}{4\times 3\times 2}=\dfrac{9}{24}-\dfrac{10}{24}=\boxed{-\dfrac{1}{24}}$

5. On transforme $0,2$ en fraction : $\dfrac{2}{3}-0,2=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{10}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{10}{15}-\dfrac{3}{15}=\boxed{\dfrac{7}{15}}$

6. Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, on simplifie dès que possible :
$\dfrac{36}{25}\times\dfrac{15}{24}\times 5=\dfrac{36\times 15\times 5}{25\times 24}=\dfrac{3\times 12\times 3\times 5\times 5}{5\times 5\times 2\times 12}=\dfrac{3\times 3}{2}=\boxed{\dfrac{9}{2}}$

7. Diviser par une fraction, c'est multiplier par l'inverse de cette fraction :
$\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\dfrac{3}{6}+\dfrac{4}{6}}{\dfrac{2}{8}-\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\dfrac{7}{6}}{-\dfrac{1}{8}}=-\dfrac{7}{6}\times\dfrac{8}{1}=-\dfrac{7\times 2\times 4}{2\times 3}=\boxed{-\dfrac{28}{3}}$

8. $\dfrac{2\times\dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{10}{4}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{11}{4}}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{11}=\dfrac{3\times 2\times 2}{2\times 11}=\boxed{\dfrac{6}{11}}$

9. $\dfrac{0,5-\dfrac{3}{17}+\dfrac{3}{37}}{\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{17}+\dfrac{5}{37}}+\dfrac{0,5-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-0,2}{\dfrac{7}{5}-\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{3}-3,5}=\dfrac{\dfrac{3}{6}-\dfrac{3}{17}+\dfrac{3}{37}}{\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{17}+\dfrac{5}{37}}+\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{7}{5}-\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{7}{2}}=$
$\dfrac{3\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{37}\right)}{5\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{37}\right)}+\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}{-7\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{21}{35}-\dfrac{5}{35}=\boxed{\dfrac{16}{35}}$

10. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1}{n\,(n+1)}-\dfrac{n}{n\,(n+1)}=\boxed{\dfrac{1}{n\,(n+1)}}$

11. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,
$\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n\,(n+1)}=\dfrac{2\,(n+1)}{n\,(n+1)}-\dfrac{n}{n\,(n+1)}-\dfrac{2}{n\,(n+1)}=\dfrac{2n+2-n-2}{n\,(n+1)}=\dfrac{n}{n\,(n+1)}=\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

12. Pour $n\in\mathbb{N}$,
$\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2\,(n+1)}+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{n+1}=$
$\dfrac{2n+1}{2\,(n+1)\,(2n+1)}+\dfrac{2\,(n+1)}{2\,(n+1)\,(2n+1)}-\dfrac{2\,(2n+1)}{2\,(n+1)\,(2n+1)}=$
$\dfrac{2n+1+2\,(n+1)-2\,(2n+1)}{2\,(n+1)\,(2n+1)}=\dfrac{2n+1+2n+2-4n-2}{2\,(n+1)\,(2n+1)}=\boxed{\dfrac{1}{2\,(n+1)\,(2n+1)}}$

Correction de la fiche n°2 - Puissances

2.1 Donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10

1. $10^5.10^3 = \boxed{10^8}$
2. $\dfrac{10^5}{10^3} = \boxed{10^2}$
3. $\left(10^5\right)^3 = \boxed{10^{15}}$
4. $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}} = \boxed{10^{-2}}$
5. $\dfrac{20^5}{2^5} = \left(\dfrac{20}{2}\right)^5 = \boxed{10^5}$
6. $5^{-3}.2^{-3} = (5 \times 2)^{-3} = \boxed{10^{-3}}$
7. $\dfrac{\left(10^3\right)^{-5}.10^5}{10^3.10^{-5}} = \dfrac{10^{-15}.10^5}{10^{-2}} = \boxed{10^{-8}}$
8. $0,001 = \boxed{10^{-3}}$
9. $\dfrac{1000.0,01^3}{0,1^3.100^2} = \dfrac{10^3.\left(10^{-2}\right)^3}{\left(10^{-1}\right)^3.\left(10^2\right)^2} = \dfrac{10^3.10^{-6}}{10^{-3}.10^4} = \boxed{10^{-4}}$

2.2 Simplifier

1. $3^{-4}.5^{-4}.15^2 = 15^{-4}.15^2 = \boxed{15^{-2}}$
2. $\dfrac{\left(30^4\right)^7}{2^{28}.5^{28}} = \dfrac{30^{28}}{10^{28}} = \boxed{3^{28}}$
3. On décompose en produit de nombres premiers : $36 = 3^2.2^2$, $70 = 7.2.5$, $10 = 2.5$, $14 = 2.7$, $28 = 2^2.7$, $15 = 3.5$:
   $\dfrac{36^3.70^5.10^2}{14^3.28^2.15^6} = \dfrac{\left(3^2\right)^3.\left(2^2\right)^3.7^5.2^5.5^5.2^2.5^2}{2^3.7^3.\left(2^2\right)^2.7^2.3^6.5^6} = \boxed{5.2^6}$
4. On factorise : $2^{21} + 2^{22} = 2^{21} + 2.2^{21} = (1+2)\,2^{21} = \boxed{3.2^{21}}$
5. $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \dfrac{3.3^{21} + 3^{21}}{3.3^{21} - 3^{21}} = \dfrac{(3+1)\,3^{21}}{(3-1)\,3^{21}} = \dfrac{4.3^{21}}{2.3^{21}} = \boxed{2}$
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, $3^n + 4.3^{n+1} - 3^{n+2} = 3^n + 12.3^n - 9.3^n = (1 + 12 - 9)\,3^n = \boxed{4.3^n}$
7. Mettre en facteur la puissance avec le plus grand exposant, ici 3^{n-1}
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $2.3^n + 4.3^{n-1} - 3^{n+1} = 6.3^{n-1} + 4.3^{n-1} - 9.3^{n-1} = (6 + 4 - 9)\,3^{n-1} = \boxed{3^{n-1}}$

Correction de la fiche n°3 - Calcul littéral

La variable x représente un nombre réel.

3.1 Développer et ordonner selon les puissances décroissantes de x

1. $(2x+1)(x-2) = 2x^2 + x - 4x - 2 = \boxed{2x^2 - 3x - 2}$
2. On reconnaît deux identités remarquables : $(a-b)^2$ et $(a-b)(a+b)$:
   $(3x-1)^2 + (x-2)(x+2) = \left(9x^2 - 6x + 1\right) + \left(x^2 - 4\right) = \boxed{10x^2 - 6x - 3}$
3. Développer d'abord en laissant les parenthèses pour éviter les erreurs de signe :
   $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1) = \left(10x^2 - x - 24\right) - \left(10x^2 - 22x + 4\right) = \boxed{21x - 28}$
4. $(x-1)\left(x^2+2x+3\right) - x(x+1)^2 = \left(x^3 + x^2 + x - 3\right) - \left(x^3 + 2x^2 + x\right) = \boxed{-x^2 - 3}$
5. $(2x+1)(x-2) - 2x(x-3) - (x-3)^2 = \left(2x^2 - 3x - 2\right) - \left(2x^2 - 6x\right) - \left(x^2 - 6x + 9\right) = \boxed{-x^2 + 9x - 11}$
6. On utilise que : $(x+2)^3 = (x+2)(x+2)^2$ puis :
   $(x+2)^3 = (x+2)(x+2)^2 = (x+2)\left(x^2 + 4x + 4\right) = \boxed{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$
7. $(2x-1)^3 = (2x-1)\left(4x^2 - 4x + 1\right) = \boxed{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$
8. $\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) = \boxed{x^4 + x^2 + 1}$
9. $\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(1 - \sqrt{2}x + x^2\right) = \left(x^2 + 1 + \sqrt{2}x\right)\left(x^2 + 1 - \sqrt{2}x\right)$ puis on peut utiliser l'identité remarquable $(a+b)(a-b)$ pour aller plus vite :
   $\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(1 - \sqrt{2}x + x^2\right) = \left(x^2 + 1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = \boxed{x^4 + 1}$

3.2 Factoriser en reconnaissant une identité remarquable

1. On reconnaît $a^2 + 2ab + b^2$: $x^2 + 2x + 1 = \boxed{(x+1)^2}$
2. On reconnaît $a^2 - 2ab + b^2$: $x^2 - 2x + 1 = \boxed{(x-1)^2}$
3. $4x^2 + 4x + 1 = \boxed{(2x+1)^2}$
4. $x^2 - 6x + 9 = \boxed{(x-3)^2}$
5. $4x^2 + 2x + \dfrac{1}{4} = \boxed{\left(2x + \dfrac{1}{2}\right)^2}$
6. On reconnaît $a^2 - b^2$: $x^2 - 1 = \boxed{(x-1)(x+1)}$
7. $9 - 4x^2 = 3^2 - (2x)^2 = \boxed{(3-2x)(3+2x)}$
8. $x^2 - 5 = x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \boxed{\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)}$
9. $x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9} = \boxed{\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2}$
10. On reconnaît $a^2 - b^2$:
    $(2x-1)^2 - 9 = (2x-1)^2 - 3^2 = (2x-1-3)(2x-1+3) = (2x-4)(2x+2) = \boxed{4(x-2)(x+1)}$
11. $(2x+3)^2 - (x+1)^2 = ((2x+3) - (x+1))((2x+3) + (x+1)) = (2x+3-x-1)(2x+3+x+1) = \boxed{(x+2)(3x+4)}$

3.3 Factoriser le plus possible

1. Facteur commun $6x$ puis identité remarquable :
   $6x^3 - 6x = 6x\left(x^2 - 1\right) = \boxed{6x\,(x-1)\,(x+1)}$

2. Facteur commun $(x+2)$:
   $(x+2)\,(x-1) + (x+2)\,(2x+3) = (x+2)\,((x-1) + (2x+3)) = \boxed{(x+2)\,(3x+2)}$

3. Facteur commun x :
   $x\,(2x+1) - x^2 + 2x\,(x-3) = x\,((2x+1) - x + 2\,(x-3)) = x\,(2x+1-x+2x-6) = \boxed{x\,(3x-5)}$

4. Identité remarquable puis facteur commun $(6x-7)$:
   $(6x+1)\,(6x-7) + 36x^2 - 49 = (6x+1)\,(6x-7) + (6x-7)\,(6x+7) = (6x-7)\,((6x+1)+(6x+7)) = (6x-7)\,(12x+8) = \boxed{4\,(6x-7)\,(3x+2)}$

5. Faire apparaître le facteur commun $(x+1)$:
   $(3x+3)\,(x-1) - (x+1)\,(2x+1) = 3\,(x+1)\,(x-1) - (x+1)\,(2x+1) = (x+1)\,(3\,(x-1) - (2x+1)) = (x+1)\,(3x-3-2x-1) = \boxed{(x+1)\,(x-4)}$

6. Facteur commun x puis identité remarquable : $x^3 + 2x^2 + 4x = x\left(x^2 + 2x + 4\right) = \boxed{x\,(x+2)^2}$

7. $x^2 - x - 6$. On peut reconnaître le développement de $(x+2)\,(x-3)$.
   Sinon, en dernier recours, on calcule le discriminant, on trouve deux racines -2 et 3, ce qui permet d'obtenir la factorisation $x^2 - x - 6 = \boxed{(x+2)\,(x-3)}$

8. $2x^2 + x - 1$. Pas de facteur commun, pas d'identité remarquable. En dernier recours, on calcule le discriminant, on trouve deux racines -1 et $\frac{1}{2}$, ce qui permet d'obtenir la factorisation
   $2x^2 + x - 1 = 2\,(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \boxed{(x+1)\,(2x-1)}$

9. $6x^2 - 5x + 1$. Pas de facteur commun, pas d'identité remarquable. En dernier recours, on calcule le discriminant, on trouve deux racines $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, ce qui permet d'obtenir la factorisation
   $6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \boxed{(3x-1)\,(2x-1)}$

Correction de la fiche n°4 - Racines carrées

4.1 Développer et simplifier

1. $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \times 5 = \boxed{20}$

2. $\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = \boxed{9+4\sqrt{5}}$

3. Identité remarquable $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ ou plus rapidement , factorisation a^2-b^2 :
$\left(3+\sqrt{7}\right)^2 - \left(3-\sqrt{7}\right)^2 = \left(\left(3+\sqrt{7}\right)+\left(3-\sqrt{7}\right)\right)\left(\left(3+\sqrt{7}\right)-\left(3-\sqrt{7}\right)\right) = 6\times 2\sqrt{7} = \boxed{12\sqrt{7}}$

4. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 = \left(2+2\sqrt{6}+3\right)+\left(2-2\sqrt{6}+3\right) = \boxed{10}$

5. $\left(\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{36-12\sqrt{3}+3}{3} = \dfrac{39-12\sqrt{3}}{3} = \boxed{13-4\sqrt{3}}$

6. $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2 = \left(2-2\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = 9-12\sqrt{2}+8 = \boxed{17-12\sqrt{2}}$

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n}} = \boxed{\sqrt{n}}$

4.2 Écrire sous la forme $p\sqrt{n}$ avec p et n deux entiers naturels

1. $\sqrt{2}+\sqrt{8} = \sqrt{2}+\sqrt{4\times 2} = \sqrt{2}+2\sqrt{2} = (1+2)\sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}}$

2. $\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{27} = \sqrt{3}-2\sqrt{4\times 3}+\sqrt{9\times 3} = \sqrt{3}-4\sqrt{3}+3\sqrt{3} = (1-4+3)\sqrt{3} = \boxed{0}$

3. $3\sqrt{2}-\sqrt{50}+3\sqrt{32}-\sqrt{8} = 3\sqrt{2}-\sqrt{25\times 2}+3\sqrt{16\times 2}-\sqrt{4\times 2} = 3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+12\sqrt{2}-2\sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{2}}$

4.3 Avec la méthode de la quantité conjuguée

On utilise que $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = a-b$.

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $2+\sqrt{2}$, c'est à dire par $2-\sqrt{2}$:
$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{4-4\sqrt{2}+2}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{2} = \boxed{3-2\sqrt{2}}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = \boxed{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

3. On met au même dénominateur :
$\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2-3} =$
$\dfrac{5\sqrt{2}-5\sqrt{3}+2\sqrt{12}-2\sqrt{18}+5\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{-1} =$
$4\sqrt{18}-10\sqrt{2} = 4\sqrt{9\times 2}-10\sqrt{2} = 12\sqrt{2}-10\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \boxed{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Correction de la fiche n°5 - Exponentielles et logarithmes

5.1 Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$

1. $\ln(16) = \ln\left(2^4\right) = \boxed{4\ln(2)}$
2. $\ln(36) = \ln(9 \times 4) = \ln(9) + \ln(4) = \ln\left(3^2\right) + \ln\left(2^2\right) = \boxed{2\ln(3) + 2\ln(2)}$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right) = -\ln(12) = -\ln\left(2^2 \times 3\right) = \boxed{-2\ln(2) - \ln(3)}$
4. $\ln(0,125) = \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) = -\ln(8) = -\ln\left(2^3\right) = \boxed{-3\ln(2)}$
5. $\ln(72) - 2\ln(3) = \ln\left(3^2 \times 2^3\right) - 2\ln(3) = 2\ln(3) + 3\ln(2) - 2\ln(3) = \boxed{3\ln(2)}$
6. $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right) = -\dfrac{1}{8}\ln\left(2^2\right) + \dfrac{1}{4}\ln\left(2^3\right) = -\dfrac{1}{4}\ln(2) + \dfrac{3}{4}\ln(2) = \boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)}$
7. $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right) =$
   $(\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(98) - \ln(99)) + (\ln(99) - \ln(100))$
   Les termes s'annulent 2 à 2 sauf le premier et le dernier.
   Ainsi, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right) = \ln(1) - \ln(100) = -\ln(100)$ car $\ln(1) = 0$.
   Enfin, $-\ln(100) = -\ln\left(2^2 \times 5^2\right) = \boxed{-2\ln(2) - 2\ln(5)}$

5.2 Simplifier le plus possible

1. $\ln\left(e^{-1}\right) = \boxed{-1}$
2. $e^{3\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}$
3. $e^{-2\ln(3)} = \dfrac{1}{e^{2\ln(3)}} = \dfrac{1}{\left(e^{\ln(3)}\right)^2} = \dfrac{1}{3^2} = \boxed{\dfrac{1}{9}}$
4. $e^{\ln(3)-\ln(2)} = \dfrac{e^{\ln(3)}}{e^{\ln(2)}} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$
5. Pour $x \in \mathbb{R}$,
   $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \left(e^{2x} + 2 \times e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 \times e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) =$
   $\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = 2 + 2 = \boxed{4}$
6. Pour $x \in \mathbb{R}$,
   $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2}\right) + \left(\dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{2}\right) = \boxed{e^{2x} + e^{-2x}}$
7. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+e^{-x}} + \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}} + \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x+1}{e^x}} + \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^x+1}{1+e^x} = \boxed{1}$
8. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) - 2\ln(\sqrt{x}) = \ln(x) - \ln\left((\sqrt{x})^2\right) = \ln(x) - \ln(x) = \boxed{0}$.
   Remarquons qu'on a ainsi : $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

Correction de la fiche n°6 - Dérivation

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7 + \dfrac{1}{x}$. On dérive terme à terme :
   $f'(x) = \boxed{3x^2 + 6x - 2 - \dfrac{1}{x^2}}$

2. $f(x) = x\sqrt{x}$. Dérivée d'un produit :
   $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}x = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x} = \boxed{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}$

3. $f(x) = x\ln(x) - x$. Dérivée d'un produit :
   $f'(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x} \times x - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \boxed{\ln(x)}$

4. $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Dérivée d'un quotient :
   $f'(x) = \dfrac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \boxed{-\dfrac{2}{(x-1)^2}}$

5. $f(x) = x^2e^{-x}$. Dérivée d'un produit et de $\exp(g)$:
   $f'(x) = 2xe^{-x} + (-1)\,e^{-x}x^2 = \boxed{e^{-x}\left(2x - x^2\right)}$

6. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. Dérivée de $\ln(g)$:
   $f'(x) = \boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

7. $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$. Dérivée de $\sqrt{g}$:
   $f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \boxed{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}}$

8. $f(x) = \left(x^2+1\right)^5$. Dérivée d'un produit et de g^n avec $n = 5$:
   $f'(x) = 5 \times 2x \times \left(x^2+1\right)^4 = \boxed{10x\left(x^2+1\right)^4}$

9. $f(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{x}$. Dérivée d'un quotient et de $\ln(g)$:
   $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2}{2x+1}x - \ln(2x+1)}{x^2} = \dfrac{2x - (2x+1)\ln(2x+1)}{2x+1} \times \dfrac{1}{x^2} = \boxed{\dfrac{2x - (2x+1)\ln(2x+1)}{x^2(2x+1)}}$

10. $f(x) = e^{x^2\ln(x)}$. Dérivée de $\exp(g)$ et d'un produit :
    $f'(x) = \left(2x\ln(x) + \dfrac{1}{x}x^2\right)e^{x^2\ln(x)} = (2x\ln(x) + x)\,e^{x^2\ln(x)} = \boxed{x\,(2\ln(x)+1)\,e^{x^2\ln(x)}}$

11. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$. Dérivée d'un produit :
    $f'(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1) = \dfrac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 2x + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}}$

12. $f(x) = x\sqrt{2x+1}$. Dérivée d'un produit et de $\sqrt{g}$:
    $f'(x) = \sqrt{2x+1} + \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}x = \sqrt{2x+1} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 + x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{2x+1+x}{\sqrt{2x+1}} = \boxed{\dfrac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+2}$. Dérivée d'un quotient :
    $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+2) - 1\left(x^2+3x\right)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+3x+4x+6-x^2-3x}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2+4x+6}{(x+2)^2}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. Dérivée d'un quotient :
    $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - \dfrac{1}{x}\left(2x^2+3x\right)}{(\ln(x))^2} = \boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}}$

15. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Dérivée d'un quotient et de $\sqrt{g}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}x}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{x+1} = \boxed{\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}}$$

16. $f(x) = \sqrt{x}(2x+1)^3$. Dérivée d'un produit et de g^n avec $n = 3$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)^3 + 3 \times 2(2x+1)^2\sqrt{x} = \frac{(2x+1)^3 + 12(2x+1)^2\left(\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}} =$$
$$\frac{(2x+1)^2\left((2x+1)+12x\right)}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{(2x+1)^2(14x+1)}{2\sqrt{x}}}$$

17. $f(x) = e^{2x}(x-1)^2$. Dérivée d'un produit et de $\exp(g)$:

$$f'(x) = 2e^{2x}(x-1)^2 + 2(x-1)e^{2x} = e^{2x}(x-1)(2(x-1)+2) = e^{2x}(x-1)(2x) = \boxed{2x(x-1)e^{2x}}$$

18. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x+1}$. Dérivée d'un quotient et d'un produit :

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1)^2 - xe^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x\left(x^2+2x+1-x\right)}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{e^x\left(x^2+x+1\right)}{(x+1)^2}}$$

19. $f(x) = \dfrac{2x+1}{e^{2x}+1}$. Dérivée d'un quotient et de $\exp(g)$:

$$f'(x) = \frac{2\left(e^{2x}+1\right) - 2e^{2x}(2x+1)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{2e^{2x} + 2 - 4xe^{2x} - 2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \boxed{\frac{2-4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}}$$

20. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Dérivée de $\sqrt{g}$ et de $\ln(g)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Correction de la fiche n°7 - Signe d'une expression

Déterminer le signe des fonctions suivantes sur l'ensemble donné

1. $f(x) = x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
   On fait un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
x	$\Vert$	$+$		$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
   $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ après mise au même dénominateur
   $= \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$ et on peut faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

3. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$
   On calcule le discriminant et on trouve deux racines : 1 et -3.
   Comme le coefficient dominant est $1 > 0$, $f(x)$ est positif sauf entre les racines :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $f(x) = (e^x - 1)\left(x^2 + 3x - 10\right)$ sur $\mathbb{R}$
   Pour $x^2 + 3x - 10$, on calcule le discriminant et on trouve deux racines : 2 et -5.
   Comme le coefficient dominant est $1 > 0$, $x^2 + 3x - 10$ est positif sauf entre les racines.
   $e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant \ln(1) = 0$.
   On peut donc faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		-5		0		2		$+\infty$
$x^2+3x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1} - 1$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$
   $f(x) = \dfrac{x^2-(2x-1)}{2x-1} = \dfrac{x^2-2x+1}{2x-1} = \dfrac{(x-1)^2}{2x-1}$ et comme $(x-1)^2 \geqslant 0$ (un carré est toujours positif),
   $f(x)$ est du signe de $2x-1$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	

6. $f(x) = \dfrac{x+1}{x} - 2$ sur $\mathbb{R}^*$
   $f(x) = \dfrac{x+1-2x}{x} = \dfrac{-x+1}{x}$ et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

7. $f(x) = 1 - \dfrac{2x(x+1)}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$
   $f(x) = \dfrac{x^2+3-2x(x+1)}{x^2+3} = \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3}$
   $x^2 + 3 \geqslant 3 > 0$ donc x^2+3 est toujours strictement positif.
   $f(x)$ est donc du signe de $-x^2 - 2x + 3$.
   On calcule le discriminant et on trouve deux racines : 1 et -3.
   Comme le coefficient dominant est $-1 > 0$, $-x^2 - 2x + 3$ est négatif sauf entre les racines.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Correction de la fiche n°8 - Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x = [2x]_{-1}^{3} = 6-(-2) = \boxed{8}$

2. $\displaystyle\int_{1}^{3} (2x-5)\,\mathrm{d}x = \left[x^2-5x\right]_1^3 = -6-(-4) = \boxed{\text{-2}}$

3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^5-x^4\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{5} = \boxed{\text{-}\frac{1}{30}}$

4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}-(-1) = \boxed{\frac{1}{2}}$

5. $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_1^{100} = 20-2 = \boxed{18}$

6. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^e = \ln(e)-\ln(1) = 1-0 = \boxed{1}$

7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(e^{2x}+x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}e^2}$

8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(1) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$
   En effet, si $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$, alors $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$.