

CENTRALE 27.

Electrostatique

(1)

I) A) ① $\Delta V + \rho/\epsilon = 0$ devient $\Delta V = 0$ car $\rho = 0$ par hypothèse.

② a) Adoptons le système de coordonnées cylindriques. En négligeant les effets de bords, la ddp imposée étant invariante par translation suivant z et rotation autour de l'axe z vertical, $V(r)$.

Comme $\Delta V = 0$, en utilisant le formulaire,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0, \text{ soit } r \frac{dV}{dr} = C_1 \text{ puis}$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C_1}{r} \rightarrow V(r) = C_1 \ln(r/r_0); r_0 = \text{cte}; \text{ on}$$

utilise la continuité du potentiel en r_e et r_c : $V(r_c) = 0$ et $V(r_e) = -U$, d'où

$$V(r) = +U \frac{\ln(r/r_e)}{\ln(r_c/r_e)}.$$

⑥. $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$, soit

$$\vec{E} = -U/r \cdot \frac{1}{\ln(r_c/r_e)} \vec{e}_r.$$

(2)

• D'après le texte, l'ionisation se produit au voisinage de l'émission soit pour $r = r_e$ donc $E_0 = \frac{U_0}{r_e} \cdot \frac{1}{\ln(r_c/r_e)}$

$$\text{et } U > U_0 = E_0 r_e \ln(r_c/r_e)$$

⑦ $U_0 = 26,3 \text{ kV}.$

③. Il faut $V(x, \pm s, z) = 0$ pour respecter $V_{\text{collecteur}} = 0$ (toute); or $\cos(\pm \frac{\pi s}{2s})$ vaut $\cos(\pm \pi/2)$ soit 0; il reste

$$V(x, \pm s, z) = \frac{U}{\Lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{e^{i k \frac{\pi(x-2nd)}{2s}}}{e^{i k \frac{\pi(x-2mb)}{2s}}} \right),$$

$$\text{soit } V(x, \pm s, z) = 0.$$

• D'autre part la surface de toute émission est une équipotentielle $-U$.

Donc pour tout k entier

$$V(2kd \pm r_e, 0, z) = -U \quad (1)$$

$$\text{et } V(2kd, \pm r_e, z) = -U \quad (2)$$

Si on utilise (1) avec $R=0$ par exemple, il vient

$$\Lambda = - \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\frac{ch \left[\pi \left(\frac{z_{mod} - r_c}{z_s} \right) \right] - 1}{ch \left[\frac{\pi (z_{mod} - r_c)}{z_s} \right] + 1} \right]$$

(b) cf. Florence. Les lignes de champs sont $\perp$ aux surfaces équipotentielles et elles descendent les potentiels.

• Comme $\rho=0$, $\text{div } \vec{E}=0$ et $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}=0$

Donc E est plus fort sur les faibles sections de tube de champ.

• Les intersections de lignes de champ au dehors des charges correspondent à des points de champ nul (en fait).

J'en ai représenté qu'un "quadrant", les autres s'en déduisent par symétrie.

(c) Pour provoquer l'ionisation il faut

ça encore $E_r = E_0$; soit $\frac{E_y}{U/s} = \frac{E_0}{U/s}$ pour $y/s = r_c/s$ ici. D'où pas lecture de $E_y/U/s$

pour $y/s = r_c/s$: $\frac{E_0}{U/s} = 24$

et $U_0 = \frac{E_0 s}{24}$; FM: $U_0 = 27,5 \text{ kV}$, ce qui correspond au même ordre de grandeur qu'en A.T.C.

B) ①. $\vec{v} = -b\vec{E}$ avec $b > 0$. Or $\vec{E}$ est orienté suivant $-\vec{e}_r$ (il descend les potentiels) donc $\vec{v}$ est suivant $+\vec{e}_r$ et $\vec{j}$ suivant $-\vec{e}_r$ car $\vec{j} = e\vec{v}$ avec $e < 0$; $i > 0$ est dans le sens des, de la collectrice vers l'émissive.

$$\vec{j} = -e b \vec{E}$$

② Considérons un cylindre de hauteur h et de rayon r compris entre r_c et r_a



Soit Σ sa surface latérale

$$i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} j \cdot ds \text{ car } j < 0 \text{ et } i > 0.$$

Compte tenu des invariances par translation (effets de bord négligés) et rotation, j n'est fonction que de r et $i = -j \cdot 2\pi r h$

Soit $i = -j 2\pi r h = +e b E 2\pi r h$ ($e < 0, E < 0$)
 et $\rho(r) = + \frac{i}{2\pi b h r}$ avec $E < 0$.

(3) $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon$. En utilisant le formulaire
 avec $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rE(r)) = \frac{\rho(r)}{\epsilon}$ d'où
 $\frac{1}{r} E \frac{d}{dr}(rE) = \frac{i}{2\pi b h r \epsilon}$ ou $rE \frac{d}{dr}(rE) = \frac{i r}{2\pi b h \epsilon}$.

(4) Soit $f(r) = rE(r)$
 $rE \frac{d}{dr}(rE) = f(r)f'(r) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr}(f^2(r))$
 soit $\frac{1}{2} \frac{d}{dr}(f^2) = \frac{i r}{2\pi b h \epsilon}$ et
 $f^2(r) = \frac{i(r^2 - r_0^2)}{2\pi b h \epsilon} + f^2(r_0)$
 soit $r^2 E^2(r) = \frac{i(r^2 - r_0^2)}{2\pi b h \epsilon} + r_0^2 E_0^2$
 $E^2(r) = \frac{i}{2\pi b h \epsilon} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 E_0^2$

soit $E(r) = - \sqrt{\frac{i}{2\pi b h \epsilon} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{r_0^2}{r^2} E_0^2}$ car
 $E(r) < 0$.

(5) En négligeant les termes en $\frac{1}{r^2}$,
 $E \approx - \sqrt{\frac{i}{2\pi b h \epsilon}}$

• $\|\vec{E}\| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ V}$.

(6) • $v = 62 \text{ m s}^{-1}$; $\rho = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ C m}^{-3}$
 $n = \rho/e = 7,5 \cdot 10^{13} \text{ ions/m}^3 = 7,5 \cdot 10^7 \text{ ions/cm}^3$

II 1) a) Les figures ne portant pas l'axe z,
 il faut le préciser.

• Figure (1) $Q = 0$: $\vec{E}_E = E \vec{e}_z + E \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta \right)$
 avec $\epsilon_r > 1$ et $E < 0$

→ à l'intérieur de la sphère, $\vec{E}_E \approx E \vec{e}_z$: on voit
 des lignes de champ quasi rectilignes ; et elles
 sont orientées suivant $-\vec{e}_z$ ($E < 0$).

→ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos \theta > 0$ et les
 lignes "entrent" dans la sphère

→ pour $\theta \in]\pi/2, 3\pi/2[$, $\cos \theta < 0$ et les
 lignes "sortent" de la sphère.

→ les ions subissent $\vec{F} = -e \vec{E}_E$ qui
 est suivant $+\vec{e}_z$ pour sa composante horizontale

• Figure (2). $Q < 0$: Il faut ajouter $\vec{E}_1$
 qui "entre" dans la sphère car $Q < 0$.

ce qui modifie les lignes mais les considérations précédentes restent valables, d'où les orientations. ⑦

Les deux zones hachurées ne sont correspondant au fait que la sphère n'est émet pas de charges.

⑤. Pour calculer $\vec{E}_1$, il faut appliquer le théorème de Gauss. Le texte parle de particule sphérique portant Q . on suppose la répartition uniforme. Alors:

→ en utilisant les π syo, $\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_r$

→ les invariances,

$$E_1 = E_1(r) \quad Q(t)$$

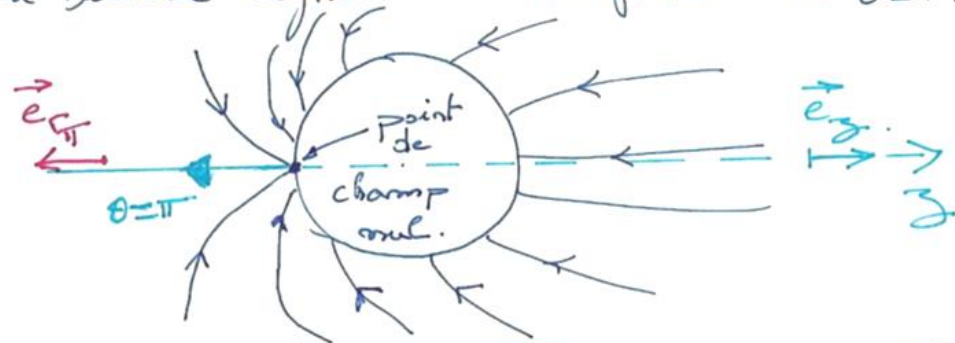
$$\oint_{\text{sphère } 0,r} E_1(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{S}_{\vec{e}_r} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$$

et
$$\vec{E}_1 = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

• $\vec{E}_1$ est orienté suivant $-\vec{e}_r$ puisque $Q < 0$:
on peut donc prévoir que les lignes de champ arrivant sur la sphère seront plus nombreuses, ce qui s'oppose à l'arrivée de nouvelles ions et ce d'autant plus que $|Q(t)|$ est grand: la portion d'ion partant les lignes de champ et donc réduite.

Ceci est d'ailleurs bien en accord ⑧ avec la 1^{ère} phrase du ④ de l'énoncé.

⑥ Plus aucune ligne de champ ne part de la sphère lorsque Q_{lim} est atteint. On voit bien en extrapolant les figures que la dernière ligne correspond à $\theta = \pi$:



Ainsi à la limite $\vec{E}_1(r=a, \theta=\pi) = \vec{0}$.

Soit $\vec{E}_1 = -\vec{E} + E \cdot 2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \vec{e}_r$ or $\vec{E} = E \vec{e}_z$
et $\vec{e}_z = -\vec{e}_{r\pi}$ (cf schéma ci-dessus) Ainsi

$$\frac{Q_{\text{lim}}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_{r\pi} = \left[\vec{E} + 2\vec{E} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right] \vec{e}_{r\pi}$$

et
$$Q_{\text{lim}} = E 4\pi\epsilon_0 a^2 \left(1 + 2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right)$$

⑦ $Q_{\text{lim}} = -1,4 \cdot 10^{-16} \text{ C} \cdot n = 875 \text{ charges.}$

② a) $\tau_q = \epsilon_0 \frac{1}{|e|}^\beta$; or ϵ_0 , grâce à $\epsilon_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ ⑨

S'exprime en $C V^{-1} m m^{-2}$

D'où $S = (C V^{-1} m^{-1})^\alpha (m^2 s^{-1})^\beta (C m^{-2})^\gamma$

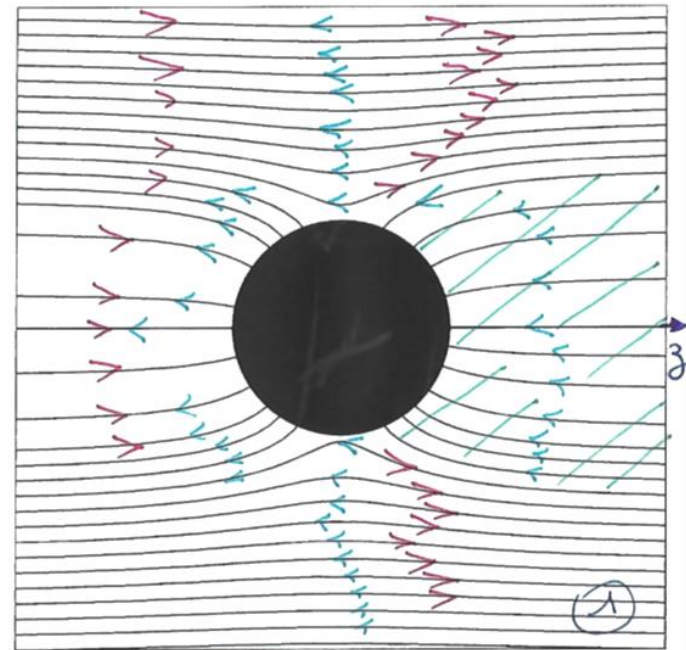
il faut $\alpha = 1, \beta = \gamma = -1$ et ainsi

$\tau_q = \frac{\epsilon_0}{|e|}$; en fait $\tau_q = \frac{4\epsilon_0}{|e|}$

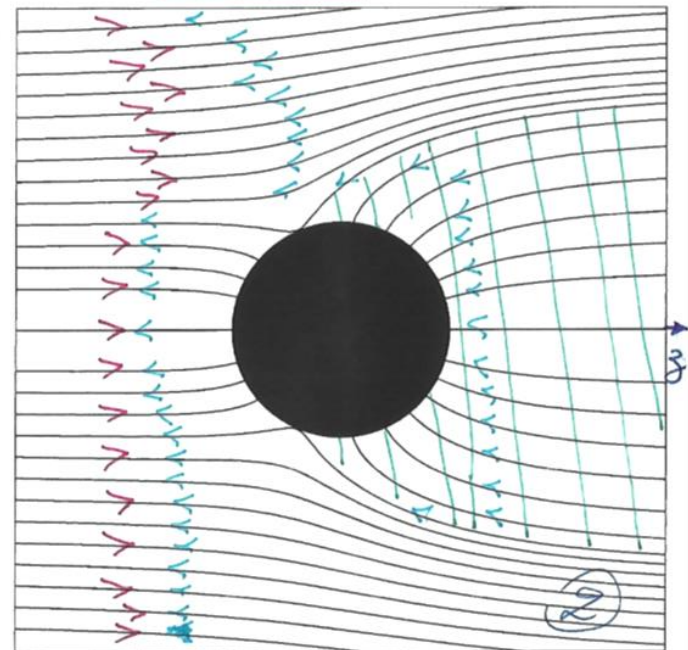
⑤ $Q/Q_{lim} = 0,9 = \frac{t_{g_0}}{t_{g_0} + \tau_q}$ d'où $t_{g_0} = 9\tau_q$

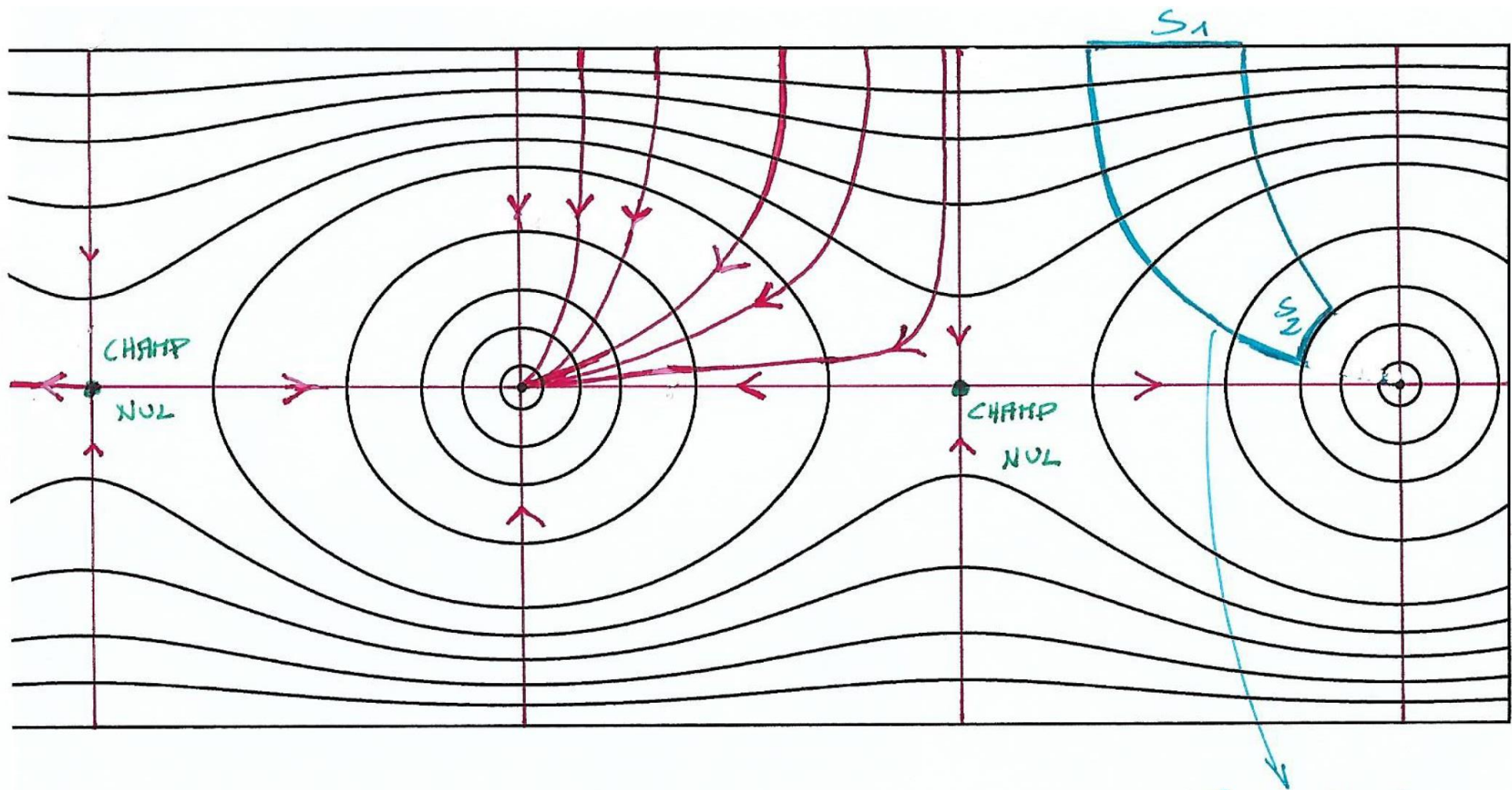
AN: $t_{g_0} \approx 20 \text{ ns}$.

⑥ $L/u_0 = 10 \text{ ns}$: c'est le temps pour que la poussière traverse l'électrofilte; $t_{g_0} \ll L/u_0$ donc les arêtes ont tout le temps de se coller aux poussières, de les charger afin qu'elles soient collectées par l'électrofilte qui sera donc efficace.



II. H. 1.





I.A. 3. b.

Tube de champ :

- Sur les parois latérales
 $\vec{E} \perp d\vec{s} : \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$
- $\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ en $\parallel$.

Donc $E_{2\text{moyen}} > E_{1\text{moyen}}.$