

Détection de posture (Centrale PSI 2014)

Nous abordons dans cette partie l'étude du dispositif permettant de détecter la position et l'orientation de la tête du pilote par rapport au cockpit de l'hélicoptère. Il est constitué d'un « cube émetteur » d'environ 2 cm de côté, solidaire du cockpit et fixé au-dessus de la tête du pilote, et d'un « cube récepteur » identique au précédent, situé dans le casque du pilote. Les cubes sont constitués chacun de trois paires de bobines plates circulaires identiques, une paire par axe du cube. Chaque bobine plate est constituée de N spires jointives et on néglige l'épaisseur de l'enroulement correspondant.

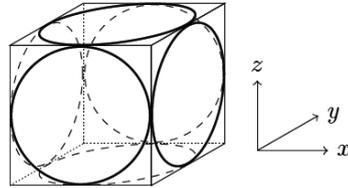


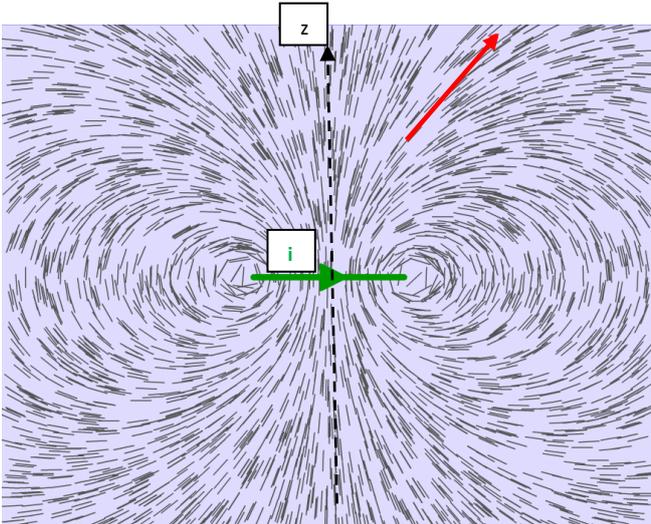
Figure 8

III.A – Paire de bobines parallèles

Chaque paire de bobines est disposée selon un arrangement particulier que l'on va déterminer et dont on va voir l'intérêt dans le contexte du problème posé.

III.A.1) On considère dans un premier temps une spire unique de centre O et d'axe Oz parcourue par un courant i constant.

- Quels sont les éléments de symétrie et les invariances de la distribution de courant ?
- Montrer que ces éléments sont en accord avec la carte de champ ci-dessous (le plan représenté est un plan quelconque contenant Oz) :



- La flèche oblique rouge représente le champ en un point M du plan ; représenter le champ en M' symétrique de M par rapport au plan de la spire.

Le calcul du champ créé par une bobine plate d'axe Oz , centrée en O , constituée de N spires identiques à la précédente permet d'obtenir la relation ci-dessous :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N i a^2}{2} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z, \text{ où } a \text{ est le rayon de la bobine et } M \text{ un point de l'axe } Oz.$$

III.A.2) On considère maintenant deux bobines identiques à la précédente, de même axe de symétrie Oz et parcourues par le même courant i , dans le même sens. Les bobines sont disposées symétriquement par rapport à l'origine O et sont distantes de $2d$.

- Calculer le champ magnétique total en tout point M de l'axe Oz en fonction notamment de la cote z de M , du rayon a des bobines et de la distance d .
- Montrer que le champ magnétique total en un point M de l'axe, très éloigné des bobines, s'écrit :

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 N i}{2a} \left(\frac{a}{z}\right)^3 \left(2 + 12\left(\frac{d}{z}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{z}\right)^2\right) \vec{u}_z$$

III.A.3) À quelle condition sur d , le champ \vec{B} créé par les bobines à grande distance est-il dipolaire ? Que vaut alors le moment magnétique \vec{m} équivalent aux deux bobines ? (Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique est rappelé en fin d'énoncé.)

La disposition des bobines d'une paire qui vient d'être déterminée, parallèles et orientées dans le même sens, est donc celle qui réalise le mieux l'approximation dipolaire.

III.B – Détection de posture : principe de fonctionnement

Chaque paire de bobines parallèles émettrices est alimentée séquentiellement par un courant sinusoïdal de pulsation ω_0 pendant une durée τ où $\omega_0\tau \gg 1$. En d'autres termes, la paire de bobines d'axe Ox est alimentée pendant l'intervalle de temps $[0, \tau]$, la paire de bobines d'axe Oy est alimentée pendant l'intervalle de temps $[\tau, 2\tau]$ et la paire de bobines d'axe Oz est alimentée pendant l'intervalle de temps $[2\tau, 3\tau]$. On recommence ensuite le cycle.

Au cours de l'intervalle $[0, \tau]$, on mesure la tension aux bornes des trois paires de bobines parallèles réceptrices (deux bobines étant montées en série au sein d'une paire associée à un axe). On procède de même au cours des intervalles $[\tau, 2\tau]$ et $[2\tau, 3\tau]$. Les informations ainsi collectées vont nous renseigner sur l'orientation de la tête du pilote, dont le « cube récepteur » est solidaire.

III.B.1) La fréquence du signal alimentant les bobines émettrices vaut $f_0 = 50\text{kHz}$. Y a-t-il lieu de tenir compte de la propagation entre les bobines émettrices et les bobines réceptrices ? Peut-on utiliser la formule du champ dipolaire employée à la question III.A.3 pour évaluer le champ magnétique créé par les bobines émettrices ?

La structure dipolaire du champ nous permet de connaître précisément la position du centre du cube récepteur par rapport au centre du cube émetteur¹.

Dans la suite, on supposera, pour simplifier, que le centre O' du cube récepteur est à la verticale du centre O du cube émetteur. On note D , la distance séparant O et O' .

¹ En réalité, le champ n'est pas parfaitement dipolaire du fait, notamment, des perturbations électromagnétiques de l'environnement. On doit alors réaliser une cartographie du champ magnétique dans la zone entourant le casque du pilote.

III.B.2) On se place dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$: seules les bobines émettrices d'axe Ox sont donc alimentées et parcourues par le courant $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$. On considère l'état de référence pour lequel le cube récepteur centré en O' a ses axes $(O'x, O'y, O'z)$ parallèles à ceux du cube émetteur.

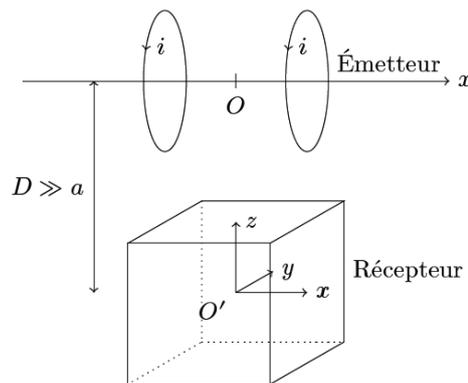


Figure 9

- Que vaut le champ magnétique $\vec{B}(O', t)$? Selon quel axe est-il dirigé ?
- Que vaut la force électromotrice $e_x(t)$ induite dans la paire de bobines réceptrices d'axe $O'x$? On supposera ces bobines orientées dans le sens direct relativement à l'axe $O'x$. Que peut-on dire des forces électromotrices induites dans les paires de bobines d'axes respectifs $O'y$ et $O'z$?
- On suppose maintenant que le cube récepteur subit une rotation d'angle θ_x autour de son axe $O'x$ par rapport à l'état de référence. Répondre aux mêmes questions qu'en b. Que constatez-vous ?
- On revient à l'état de référence et on fait subir au cube récepteur une rotation d'angle θ_y autour de son axe $O'y$. Calculer les nouvelles valeurs prises par les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{z'}(t)$ induites dans les paires de bobines d'axes respectifs $O'x$ et $O'z$ en fonction de $e_x(t)$ et de l'angle θ_y . On adoptera la même convention d'orientation pour les paires de bobines d'axes $O'y$ et $O'z$ relativement à leurs axes respectifs que pour la paire de bobines d'axe $O'x$.
- On revient à l'état de référence et on fait subir au cube récepteur une rotation d'angle θ_z autour de son axe $O'z$. Calculer les nouvelles valeurs prises par les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{y'}(t)$ induites dans les paires de bobines d'axes respectifs $O'x$ et $O'y$ en fonction de $e_x(t)$ et de l'angle θ_z .
- Les résultats obtenus aux questions précédentes montrent que la force électromotrice $e_{x'}(t)$ dépend à la fois des rotations d'axes $O'y$ et $O'z$. La composition des rotations étant une opération non triviale, on décide de s'en affranchir en s'abstenant de mesurer $e_{x'}(t)$ pendant l'intervalle de temps $[0, \tau]$. On posera donc : $e_{x'}(t) = 0$ dans cet intervalle.

Montrer qu'on peut formellement écrire les résultats obtenus dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$ sous forme d'une matrice liant les vecteurs $(e_{x'}(t), e_{y'}(t), e_{z'}(t))$ et $(e_x(t), 0, 0)$.

III.B.3) On se place dans l'intervalle de temps $[\tau, 2\tau]$, seules les bobines émettrices d'axe Oy sont donc alimentées et parcourues par le courant $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$. De manière analogue à la démarche adoptée en **III.B.2**, on ne mesure que les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{z'}(t)$. En procédant comme ci-dessus, établir la relation matricielle liant les vecteurs $(e_{x'}(t), e_{y'}(t), e_{z'}(t))$ et $(0, e_y(t), 0)$, où $e_y(t)$ désigne la force électromotrice induite dans la paire de bobines d'axe $O'y$ dans la configuration de référence.

III.B.4) Enfin, on se place dans l'intervalle de temps $[2\tau, 3\tau]$, seules les bobines émettrices d'axe Oz sont donc alimentées et parcourues par le courant $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$. De manière analogue à la démarche adoptée en **III.B.2**, on ne mesure que les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{y'}(t)$. En procédant comme ci-dessus, établir la relation matricielle liant les vecteurs $(e_{x'}(t), e_{y'}(t), e_{z'}(t))$ et $(0, 0, e_z(t))$, où $e_z(t)$ désigne la force électromotrice induite dans la paire de bobines d'axe $O'z$ dans la configuration de référence.

III.B.5) Synthétiser les mesures effectuées au cours des trois intervalles de temps $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$ et $[2\tau, 3\tau]$ à l'aide d'une unique relation matricielle. Justifier que l'on a bien réalisé une détection de posture. Sachant que $\tau \approx 5$ ms et que le temps de réponse maximal admissible est de l'ordre de 20 ms, le cahier des charges vous paraît-il rempli ?

$$\text{Célérité de la lumière dans le vide} \qquad c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Formulaire

Développement limité au voisinage de 0 :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{m} = m\vec{u}_z$ en coordonnées sphériques :

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Corrigé (schémas en pages 7 et 8)

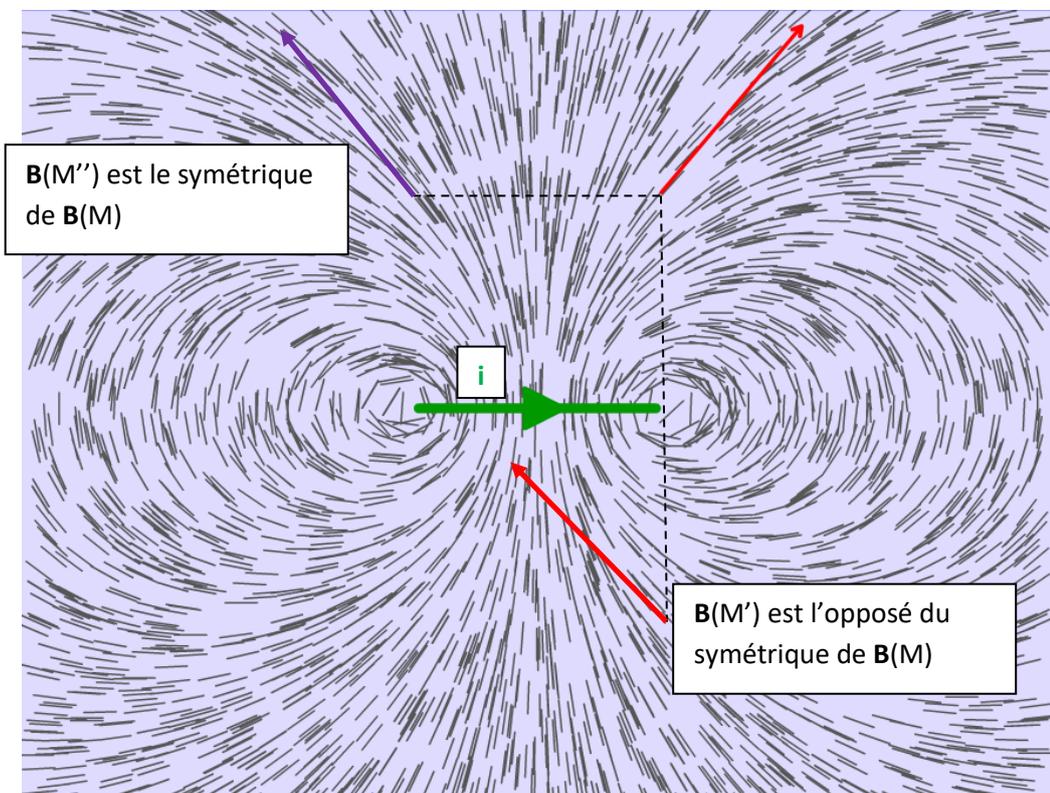
III.A.1)

1. La distribution de courant dans la spire est invariante par rotation autour de son axe Oz.
2. Le plan de la spire ($z = 0$) est plan de symétrie de la distribution de courant.
3. Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie de la distribution de courant.

On voit sur la carte que :

- Le champ \mathbf{B} est contenu dans tout plan contenant Oz qui est bien plan d'antisymétrie des courants : ceci est en accord avec 1. et 3. (et notamment en un point de l'axe Oz, \mathbf{B} est suivant z).
- Les lignes de la cartographie sont symétriques par rapport à tous les plans cités en 2. et 3. : les champs en deux points M et M' symétriques par rapport à ces plans sont soit symétriques soit opposés du symétrique l'un de l'autre.
- On peut réaliser le schéma ci-dessous : le plan de la spire est plan de symétrie de la distribution de courant.

On a ajouté sur la partie gauche de la simulation le champ en un point M'' symétrique de M par rapport au plan contenant z et orthogonal à la carte. Ces deux résultats illustrent le point précédent.



III.A.2)

a. On additionne deux champs magnétostatiques « décalés » comme le sont les centres des bobines,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i a^2}{2} \vec{e}_z [f_d(z) + f_{-d}(z)] \quad \text{où on a posé} \quad f_u(z) = [a^2 + (z - u)^2]^{\frac{3}{2}}.$$

b. Faisant le développement à l'ordre 2 en u/z et a/z , $f_u(z) = \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{3u^2 + a^2 + 2uz}{z^2} + \frac{15}{8} \left(\frac{2u}{z} \right)^2 \right]$.

En sommant les deux termes avec $u = \pm d$, seules subsistent les termes pairs en d et il vient $f_d(z) +$

$$f_{-d}(z) = \frac{1}{z^3} \left[2 - 3 \left(\frac{a}{z} \right)^2 + 12 \left(\frac{d}{z} \right)^2 \right] \quad \text{d'où l'expression demandée pour le champ magnétique créé sur}$$

$$\text{l'axe des deux bobines,} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 N i a^2}{2z^3} \left[2 - 3 \left(\frac{a}{z} \right)^2 + 12 \left(\frac{d}{z} \right)^2 \right] \vec{u}_z.$$

III.A.3) On se trouve sur l'axe en un point tel que $\theta = 0$ et on s'attend donc à trouver un terme en $1/z^3$; il faut donc annuler les termes en $1/z^5$ et le champ sera dipolaire à des termes en $1/z^7$ près (au moins sur cet axe...). La condition $12d^2 = 3a^2$ impose donc $a = 2d$ et, par identification à la formule de l'énoncé,

$$\vec{m} = 2\pi N i a^2 \vec{u}_z, \quad \text{résultat qui correspond bien au moment magnétique d'I bobine plate de } 2N \text{ spires et de surface } \pi a^2 : (2N) \cdot (\pi a^2) \cdot i.$$

R : a et d étant du même ordre de grandeur, cela justifie le même ordre de développement en a/z et d/z.

III.B.1) Il s'agit de vérifier que l'ARQS est licite : Dans un hélicoptère la distance entre la tête du pilote et

le cockpit est de l'ordre de 0,5 m. On compare alors $T = \frac{1}{f} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ à $\tau = \frac{0,5}{c} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

On a bien un temps de propagation très inférieur au temps caractéristique de variation des courants ; l'ARQS est vérifiée et les expressions issues de la magnétostatique peuvent être conservées.

III.B.2)

a. Au point O' on applique la formule proposée avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$ donc le champ magnétique

$$\text{ressenti au centre du récepteur est } \vec{B}(O', t) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi D^3} \vec{u}_x \quad \text{donc} \quad \vec{B}(O', t) = -\frac{\mu_0 a^2 N I \cos(\omega_0 t)}{2D^3} \vec{u}_x.$$

b. $e_x(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ où le flux de $\vec{B}(O', t)$ à travers la paire de bobines $\Phi = 2N\pi a^2 \vec{B}(O', t) \cdot \vec{u}_x$

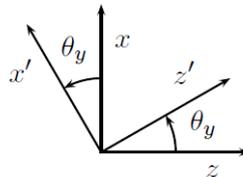
$$\text{donc} \quad e_x(t) = -\frac{\mu_0 N^2 \pi a^4 I \omega_0}{D^3} \sin(\omega_0 t). \quad \text{Par contre, les deux autres paires de bobines ont leur}$$

surface perpendiculaire à \vec{B} donc $e_y(t) = e_z(t) = 0$.

c. Dans une rotation d'angle θ_x autour de \vec{u}_x , le vecteur unitaire \vec{u}'_x des bobines d'axe (Ox) est inchangé, tandis que les deux autres bobines restent perpendiculaires au champ magnétique : rien de change et cette mesure ne permet donc pas de détecter l'angle θ_x .

d. Les nouveaux vecteurs directeurs des axes des bobines du récepteur sont représentés ci-dessous. Le champ magnétique créé par l'émetteur est toujours dirigé selon $-\vec{u}_x$ mais les composantes selon \vec{u}'_x , \vec{u}'_y et \vec{u}'_z sont modifiées, $B'_x = B_x \cos \theta_y$, $B'_y = 0$ est en fait inchangée

$$\text{et } B'_z = B_x \sin \theta_y.$$



La même modification affecte les flux, donc les forces électromotrices induites et $e'_x(t) = e_x(t) \cos \theta_y$,

$$e'_y(t) = 0 \quad \text{et} \quad e'_z(t) = e_x(t) \sin \theta_y.$$

e. Le raisonnement est exactement le même, il suffit de chercher les nouvelles projections de \vec{B} et on trouve $e'_x(t) = e_x(t) \cos \theta_z$, $e'_y(t) = -e_x(t) \sin \theta_z$ et $e'_z(t) = 0$.

f. En présence des trois rotations, la force électromotrice $e'_y(t)$ est affectée par la rotation θ_z et elle-seule,

tandis que $e'_z(t)$ est affectée par θ_y seule, donc
$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots \\ -\sin\theta_z & \dots & \dots \\ \sin\theta_y & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 où les

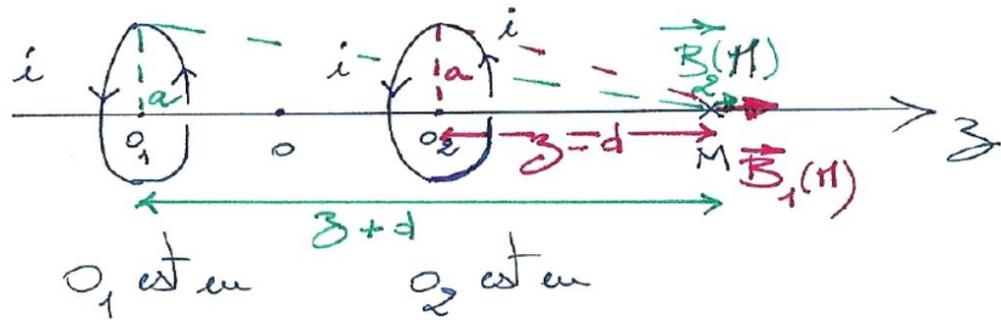
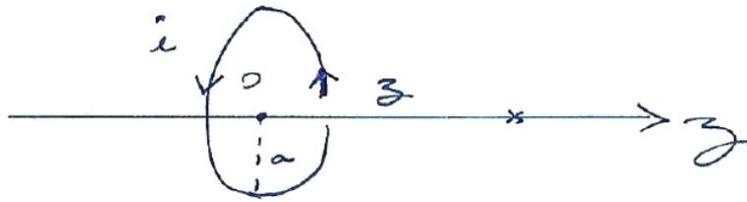
pointillés peuvent représenter n'importe quelle valeur.

III.B.3) On répète le procédé pour trouver
$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \sin\theta_z & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & -\sin\theta_x & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_y(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

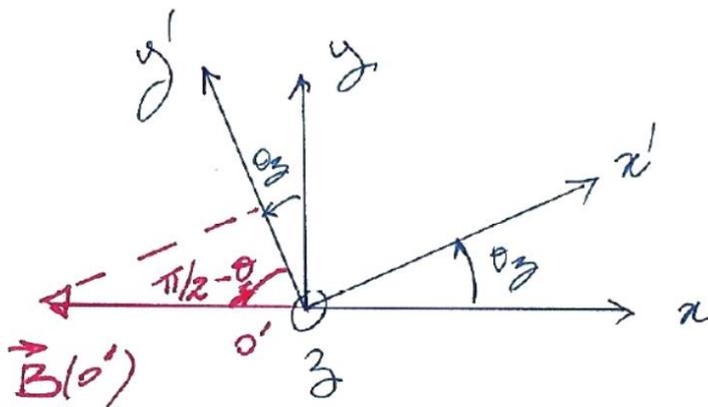
III.B.4) On trouve de même
$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & -\sin\theta_y \\ \dots & \dots & \sin\theta_x \\ \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_z(t) \end{bmatrix}.$$

III.B.5) On regroupe ces résultats,
$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta_z & -\sin\theta_y \\ -\sin\theta_z & 0 & \sin\theta_x \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_z(t) \end{bmatrix};$$
 le dispositif

permet donc de mesurer les trois angles (ou en fait leur sinus; il reste une indétermination qui correspond au passage du voisinage de 0 à celui de π , donc à un retournement complet qui ne serait pas détecté ici), ce qui est bien une détection de la posture du casque. Il faut enfin 5 ms pour chacune des trois mesures donc le temps de réponse est $3\tau < 20$ ms, correspondant au cahier des charges (50 mesures par seconde).



$z_{o_1} = -d$ $z_{o_2} = +d$



$$\begin{cases} \sin \alpha' B_x \cos \theta_z \\ \sin \gamma' - B_x \sin \theta_z \end{cases} \quad (B_x < 0)$$

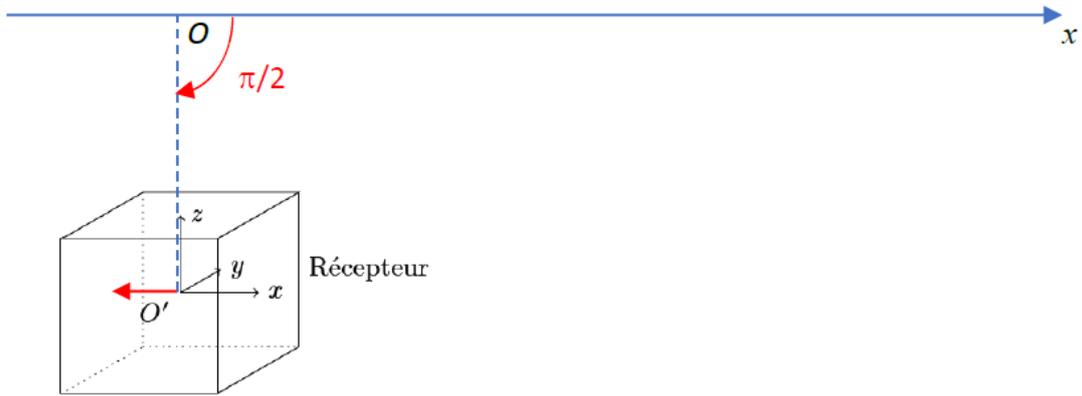


Figure 9

Le dipôle équivalent est en O.

En O' , $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{u}_{\theta, O'}$ est en rouge sur le schéma.

