Colles de mathématique ψ^*
Programme de la quinzaine 1 : 18 au 29 septembre

Séries numériques (réelles ou complexes)

- rappels de première année : divergence grossière, convergence absolue, règles d'équivalent, de Riemann, de domination, de minoration ;
- séries géométriques ;
- règle de D'Alembert, absolue convergence de $\sum \frac{1}{n!} z^n$ pour tout complexe z, définition correcte de l'exponentielle ;
- définition du produit de Cauchy $u * v$ de deux suites u, v ;
- si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (u * v)_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$ (admis) ;
- application : relation fonctionnelle de $\exp$;
- théorème de comparaison série-intégrale, encadrement des restes ;
- théorème des séries alternées ;
- utilisation d'un développement limité pour élucider la nature d'une série de signe non constant ;
- calcul de sommes par télescopage ;
- principe du calcul numérique par troncature des sommes de séries.

Espaces vectoriels normés

- définition d'une norme, d'un vecteur unitaire ;
- normes classiques sur $\mathbb{k}^n$, $M_n(\mathbb{k})$, $C^0([a, b])$, $\mathbb{k}[X]$;
- définition de la distance et des boules associées à une norme ;
- définition des parties convexes, convexité des boules ;
- définition des parties bornées, des fonctions bornées.

NB : la comparaison des normes n'est plus au programme, mais peut faire l'objet d'un exercice.

Preuves exigibles :

- convergence de $\sum \frac{1}{n!} z^n$, définition et relation fonctionnelle de $\exp$;
- théorème série-intégrale ;
- convexité des boules.