Colles de mathématique ψ^*
Programme 3 : 15 octobre au 9 novembre

Limite et continuité en dimension finie

- définition ε-esque de l'existence d'une limite en a pour une fonction f, où a est adhérent au domaine de définition de f ;
- caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite en a ;
- caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées ;
- opérations sur les limites, composition ;
- définition de la continuité ;
- continuité des applications linéaires, multilinéaires (admis), lipschitziennes, polynomiales ;
- si f est une application continue à valeurs réelles, alors $A = \{ x \mid f(x) > 0 \}$ est ouvert, $B = \{ x \mid f(x) \geq 0 \}$ est fermé, etc ;
- Si f est à valeurs réelles, définie et continue sur A non vide, borné, fermé dans un ev de dimension finie, alors $\min_A f$ et $\max_A f$ existent.

Dérivation des fonctions vectorielles de variable réelle

Toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I, et à valeurs dans un ev de dimension finie.

- dérivée en un point, utilisation d'un DL, interprétation cinématique de $F'(a)$ et $F''(a)$;
- fonction dérivée, utilisation des fonctions coordonnées ;
- propriétés opérationnelles, dérivation de $F \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles ;
- dérivation des fonctions du type $u \circ F$ où u est linéaire et F est $\mathcal{C}^1$;
- dérivation des fonctions du type $b(F, G)$ où b est bilinéaire, F et G sont $\mathcal{C}^1$;
- définition et propriétés opérationnelles des fonctions $\mathcal{C}^p$;
- classe d'un prolongement ou raccordement, par l'étude de la limite des dérivées au point problématique ;
- rappel des propriétés spécifiques aux fonctions à valeurs réelles : Rolle, accroissements finis, dérivabilité et dérivée de f^{-1} ;
- pour une fonction à valeurs réelles : définition de la convexité, caractérisation des fonctions convexes $\mathcal{C}^2$.

En deuxième semaine uniquement : courbes paramétrées

- définition des points réguliers, tangente en un tel point ;
- étude locale au voisinage d'un point (stationnaire ou non), basée sur un DL vectoriel à interpréter géométriquement ;
- longueur d'un arc ;
- pratique du tracé d'une courbe paramétrée.

Preuves exigibles :

- continuité des applications linéaires ;
- si f est une application continue à valeurs réelles, alors $A = \{ x \mid f(x) > 0 \}$ est ouvert, $B = \{ x \mid f(x) \geq 0 \}$ est fermé, etc ;
- dérivation de $u \circ f$ où u est linéaire et f est $\mathcal{C}^1$;
- dérivation de $b(f, g)$ où b est bilinéaire, f et g sont $\mathcal{C}^1$.