

# Colles de mathématique $\psi^*$

## Programme 3 : 14 octobre au 8 novembre

### Limite et continuité en dimension finie

- définition  $\varepsilon$ -esque de l'existence d'une limite en  $a$  pour une fonction  $f$ , où  $a$  est adhérent au domaine de définition de  $f$  ;
- caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite en  $a$  ;
- caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées ;
- opérations sur les limites, composition ;
- définition de la continuité ;
- continuité des applications linéaires, multilinéaires (admis), lipschitziennes, polynomiales ;
- si  $f$  est une application continue à valeurs réelles, alors  $A = \{x \mid f(x) > 0\}$  est ouvert,  $B = \{x \mid f(x) \geq 0\}$  est fermé, etc ;
- Si  $f$  est à valeurs réelles, définie et continue sur  $A$  non vide, borné, fermé dans un ev de dimension finie, alors  $\min_A f$  et  $\max_A f$  existent.

### Dérivation des fonctions vectorielles de variable réelle

Toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle  $I$ , et à valeurs dans un ev de dimension finie.

- dérivée en un point, utilisation d'un DL, interprétation cinématique de  $F'(a)$  et  $F''(a)$  ;
- fonction dérivée, utilisation des fonctions coordonnées ;
- propriétés opérationnelles, dérivation de  $F \circ \varphi$  où  $\varphi$  est à valeurs réelles ;
- dérivation des fonctions du type  $u \circ F$  où  $u$  est linéaire et  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  ;
- dérivation des fonctions du type  $b(F, G)$  où  $b$  est bilinéaire,  $F$  et  $G$  sont  $\mathcal{C}^1$  ;
- définition et propriétés opérationnelles des fonctions  $\mathcal{C}^p$  ;
- classe d'un prolongement ou raccordement, par l'étude de la limite des dérivées au point problématique ;
- rappel des propriétés spécifiques aux fonctions à valeurs réelles : Rolle, accroissements finis, dérivabilité et dérivée de  $f^{-1}$  ;
- pour une fonction à valeurs réelles : définition de la convexité, caractérisation des fonctions convexes  $\mathcal{C}^2$ .

## En deuxième semaine uniquement : courbes paramétrées

- définition des points réguliers, tangente en un tel point ;
- étude locale au voisinage d'un point (stationnaire ou non), basée sur un DL vectoriel à interpréter géométriquement ;
- longueur d'un arc ;
- pratique du tracé d'une courbe paramétrée.

## Preuves exigibles :

- continuité des applications linéaires ;
- si  $f$  est une application continue à valeurs réelles, alors  $A = \{x \mid f(x) > 0\}$  est ouvert,  $B = \{x \mid f(x) \geq 0\}$  est fermé, etc ;
- dérivation de  $u \circ f$  où  $u$  est linéaire et  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  ;
- dérivation de  $b(f, g)$  où  $b$  est bilinéaire,  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^1$ .