

Colles de mathématique ψ^*

Programme 4 : 9 au 19 novembre

1. Produit et somme d'espaces vectoriels

- définition du produit d'un nombre fini d'ev sur le même corps \mathbb{K} , lois naturelles, dimension ;
- définition de la somme d'un nombre fini de sev, d'une somme directe ;
- $\dim \sum F_i \leq \sum \dim F_i$ avec égalité ssi la somme est directe ;
- définition d'une famille de sev supplémentaires, et des projecteurs associés ;
- bases adaptées à une famille de sev supplémentaires ;
- si $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, alors pour tout choix de $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{L}(F_1, G) \times \dots \times \mathcal{L}(F_p, G)$, il existe exactement une $f \in \mathcal{L}(E, G)$ qui coïncide avec les u_i sur les F_i (TFAL).

2. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

- matrice ligne d'une forme linéaire, formule de changement de base ;
- définition d'un hyperplan, caractérisation comme noyau d'une forme linéaire non nulle ;
- deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi elles sont proportionnelles ;
- équations d'un hyperplan, vecteur normal à un hyperplan.

3. Endomorphismes et matrices carrées

- matrices d'un endomorphisme, endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée ;
- structure d'algèbre non commutative non intègre de $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $fg = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im } g \subset \text{Ker } f$;
- formules de changement de base, matrices semblables ;
- trace d'une matrice carrée, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, des matrices semblables ont même trace ;
- calcul matriciel par blocs.

Preuves exigibles :

- $\dim \sum F_i \leq \sum \dim F_i$ avec égalité ssi la somme est directe ;
- TFAL ;
- caractérisation d'un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle ;
- deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi elles sont proportionnelles.