Colles de mathématique ψ^*
Programme 4 : 8 au 19 novembre

1. Produit et somme d'espaces vectoriels

- définition du produit d'un nombre fini d'ev sur le même corps $\mathbb{K}$, lois naturelles, dimension ;
- définition de la somme d'un nombre fini de sev, d'une somme directe ;
- $\dim \sum F_i \leq \sum \dim F_i$ avec égalité ssi la somme est directe ;
- définition d'une famille (finie) de sev supplémentaires, et des projecteurs associés ;
- bases adaptées à une famille de sev supplémentaires ;
- si $E = \oplus_{i=1}^{p} F_i$, alors pour tout choix de $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathcal{L}(F_1, G) \times \cdots \times \mathcal{L}(F_p, G)$, il existe exactement une $f \in \mathcal{L}(E, G)$ qui coïncide avec les u_i sur les F_i (TFAL).

2. Formes linéaires et hyperplans

- matrice ligne d'une forme linéaire, formule de changement de base ;
- définition d'un hyperplan, caractérisation comme noyau d'une forme linéaire non nulle ;
- deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi elles sont proportionnelles ;
- équations d'un hyperplan, vecteur normal à un hyperplan.

3. Endomorphismes et matrices carrées

- matrices d'un endomorphisme, endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée ;
- structure d'algèbre non commutative non intègre de $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $fg = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$;
- formules de changement de base, matrices semblables ;
- trace d'une matrice carrée, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, des matrices semblables ont même trace ;
- calcul matriciel par blocs.

En deuxième semaine uniquement : déterminants

- théorème fondamental (admis) : il existe exactement une forme multilinéaire alternée par rapport aux colonnes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, valant 1 sur la matrice I ; les autres formes multilinéaires alternées lui sont proportionnelles ;
- définition du déterminant vectoriel en base B d'une famille de n vecteurs : déterminant de la matrice de passage ;

- propriétés classiques ;
- calcul par la méthode du pivot, par développement par rapport à une ligne ou colonne ;
- calcul du déterminant de Vandermonde, CNS d'inversibilité d'une matrice VDM.

Preuves exigibles :

- $\dim \sum F_i \leq \sum \dim F_i$ avec égalité ssi la somme est directe ;
- TFAL ;
- en dimension finie : caractérisation d'un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, unique à facteur multiplicatif près ;
- en deuxième semaine uniquement : calcul du déterminant de Vandermonde.