Colles de mathématique ψ^*
Programme 5 : 23 novembre au 4 décembre

Déterminants

- théorème fondamental (admis) : il existe exactement une forme multilinéaire alternée par rapport aux colonnes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, valant 1 sur la matrice I ; les autres formes multilinéaires alternées lui sont proportionnelles ;
- définition du déterminant vectoriel en base B d'une famille de n vecteurs : déterminant de la matrice de passage ;
- propriétés classiques ;
- calcul par la méthode du pivot, par développement par rapport à une ligne ou colonne ;
- calcul du déterminant de Vandermonde, CNS d'inversibilité d'une matrice VDM.

Éléments propres

- valeurs propres, spectre d'un endomorphisme (en dimension finie ou non), méthodes de calcul ;
- vecteurs propres, sev propres d'un endomorphisme ;
- propriétés des éléments propres : les sev propres sont en somme directe, etc ;
- éléments propres d'une matrice carrée : ceux de l'endomorphisme canoniquement associé ;
- calcul a priori de la dimension des sev propres par la formule du rang ;
- si A est réelle et V est un vecteur propre associé à λ, alors $\overline{V}$ est propre associé à $\overline{\lambda}$;
- définition et premiers coefficients du polynôme caractéristique :
$$\chi_A = \det(XI - A) = X^n - \mathrm{tr}\,(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)X^0$$
- si χ_A est scindé alors $\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{mult}(\lambda)\,\lambda$, $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{\mathrm{mult}(\lambda)}$;
- si v est induit par u, alors $\chi_v \mid \chi_u$ et $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$;
- Cayley-Hamilton (*admis*).

NB : la réduction n'est pas encore vue en cours, mais peut être abordée sur un exemple guidé.

Preuves exigibles :

- déterminant de Vandermonde ;
- toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre ;
- $\det(XI - A) = X^n - \mathrm{tr}\,(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)X^0$.