

# Colles de mathématique $\psi^*$

## Programme 6 : 10 au 21 décembre

### 1. Suites de fonctions

Elles sont définies sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- définition de la convergence simple, fonction limite simple ;
- définition de la convergence uniforme, elle implique la convergence simple ;
- définition de la convergence uniforme sur tout segment (CVUTS) ;
- intégrale d'une limite uniforme sur un segment ;
- théorème d'interversion de  $\lim_{x \rightarrow a}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ , en cas de convergence uniforme sur un voisinage de  $a$  (*admis*) ;
- continuité de la limite simple quand il y a CVUTS ;
- dérivation de la limite simple quand il y a CVUTS des dérivées ;
- classe de la limite simple.

### Séries de fonctions

- fonction somme, fonctions restes ;
- CNS de convergence uniforme :  $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$  (utilisé surtout quand  $\sum f_n(x)$  est alternée) ;
- CS de convergence uniforme : convergence normale (utilisé dans la plupart des cas) ;
- adaptation en termes de séries des 4 théorèmes d'interversion.

### Séries entières (tout début)

- théorème d'existence et d'unicité du rayon de convergence ;
- méthodes de calcul du rayon.

### Preuves exigibles :

- théorème de dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions  $\mathcal{C}^1$  ;
- limites en 1 et en  $+\infty$  de  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$  ;
- existence et unicité du rayon de convergence d'une série entière + lemme d'Abel.