

Colles de mathématique ψ^*

Programme 6 : 10 au 21 décembre

1. Suites de fonctions

Elles sont définies sur un intervalle de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

- définition de la convergence simple, fonction limite simple ;
- définition de la convergence uniforme, elle implique la convergence simple ;
- définition de la convergence uniforme sur tout segment (CVUTS) ;
- intégrale d'une limite uniforme sur un segment ;
- théorème d'interversion de $\lim_{x \rightarrow a}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty}$, en cas de convergence uniforme sur un voisinage de a (*admis*) ;
- continuité de la limite simple quand il y a CVUTS ;
- dérivation de la limite simple quand il y a CVUTS des dérivées ;
- classe de la limite simple.

Séries de fonctions

- fonction somme, fonctions restes ;
- CNS de convergence uniforme : $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ (utilisé surtout quand $\sum f_n(x)$ est alternée) ;
- CS de convergence uniforme : convergence normale (utilisé dans la plupart des cas) ;
- adaptation en termes de séries des 4 théorèmes d'interversion.

Séries entières (tout début)

- théorème d'existence et d'unicité du rayon de convergence ;
- méthodes de calcul du rayon.

Preuves exigibles :

- théorème de dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions \mathcal{C}^1 ;
- limites en 1 et en $+\infty$ de $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$;
- existence et unicité du rayon de convergence d'une série entière + lemme d'Abel.