

# Colles de mathématique $\psi^*$

## Programme 7 : 7 au 18 janvier

### 1. Séries entières

- théorème d'existence et d'unicité du rayon de convergence ;
- méthodes de calcul du rayon ;
- rayon et somme d'une combinaison linéaire de séries entières, du produit de Cauchy de deux séries entières ;
- convergence uniforme sur toute boule fermée incluse dans le disque ouvert de convergence ;
- continuité de la fonction somme sur ce disque ;
- variable réelle : primitivation et dérivation terme à terme sur  $] -R, R[$  ;
- formule de Maclaurin donnant l'expression des coefficients d'un DSE ;
- définition d'une fonction développable en série entière (*au voisinage de 0 uniquement*), unicité du DSE ;
- CN d'existence :  $f$  est  $C^\infty$  sur un voisinage de 0 ; CS d'existence :  $f$  est combinaison linéaire, produit ponctuel, primitive, dérivée de fonctions réputées DSE ;
- DSE classiques à savoir par coeur :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\cosh$ ,  $\sinh$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $-\ln(1-x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\arctan x$ ,  $(1+x)^\alpha$  ;
- recherche des solutions DSE d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.

### 2. Intégrales généralisées (existence uniquement)

- définition d'une fonction continue par morceaux, structure d'ev ;
- définition de l'intégrale sur un segment d'une telle fonction (par Chasles) ;
- intégrale sur un intervalle non segment : définition de la convergence ;
- propriétés classiques des intégrales convergentes (linéarité, Chasles, majoration, croissance, ...)
- absolue convergence, définition d'une fonction intégrable ;
- fonctions intégrables de référence : puissances en 0 ou  $+\infty$ , exponentielles en  $\pm\infty$ ,  $\ln$  en 0 ;
- règles d'équivalent, de Riemann, de domination ;
- définition d'une intégrale semi-convergente, exemple typique  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  ;
- ev  $\mathcal{L}^1(I)$ , norme 1 ; ev  $\mathcal{L}^2(I)$ , produit scalaire et norme 2.

### 3. Preuves exigibles :

- primitivation d'une fonction entière ;
- dérivation d'une fonction entière ;
- existence et calcul du DSE de  $(1+x)^\alpha$  .
- semi-convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  .