

# Colles de mathématique $\psi^*$

## Programme 7 : 4 au 15 janvier

### Séries de fonctions

- fonction somme, fonctions restes ;
- CNS de convergence uniforme :  $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$  (utilisé surtout quand  $\sum f_n(x)$  est alternée) ;
- CS de convergence uniforme : convergence normale (utilisé dans la plupart des cas) ;
- adaptation en termes de séries des 4 théorèmes d'interversion.

### Séries entières

- théorème d'existence et d'unicité du rayon de convergence ;
- méthodes de calcul du rayon ;
- rayon et somme d'une combinaison linéaire de séries entières, du produit de Cauchy de deux séries entières ;
- convergence uniforme sur toute boule fermée incluse dans le disque ouvert de convergence ;
- continuité de la fonction somme sur ce disque ;
- variable réelle : primitivation et dérivation terme à terme sur  $] -R, R[$  ;
- formule de Maclaurin donnant l'expression des coefficients d'un DSE ;
- définition d'une fonction développable en série entière (*au voisinage de 0 uniquement*), unicité du DSE ;
- CN d'existence :  $f$  est  $C^\infty$  sur un voisinage de 0 ; CS d'existence :  $f$  est combinaison linéaire, produit ponctuel, primitive, dérivée de fonctions réputées DSE ;
- DSE à savoir par coeur :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\cosh$ ,  $\sinh$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $-\ln(1-x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\arctan(x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  ;
- recherche des solutions DSE d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.

### Preuves exigibles :

- limites en 1 et en  $+\infty$  de la fonction  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$  ;
- primitivation d'une fonction entière ;
- dérivation d'une fonction entière ;
- existence et calcul du DSE de  $(1+x)^\alpha$  .