Colles de mathématique ψ^*
Programme 7 : 3 au 14 janvier

Séries entières

- théorème d'existence et d'unicité du rayon de convergence ;
- méthodes de calcul du rayon ;
- rayon et somme d'une combinaison linéaire de séries entières, du produit de Cauchy de deux séries entières ;
- convergence uniforme sur toute boule fermée incluse dans le disque ouvert de convergence ;
- continuité de la fonction somme sur ce disque ;
- variable réelle : primitivation et dérivation terme à terme sur $]-R, R[$;
- formule de Maclaurin donnant l'expression des coefficients d'un DSE ;
- définition d'une fonction développable en série entière *(au voisinage de 0 uniquement)*, unicité du DSE ;
- CN d'existence : f est C^∞ sur un voisinage de 0 ; CS d'existence : f est combinaison linéaire, produit ponctuel, primitive, dérivée de fonctions réputées DSE ;
- DSE à savoir par coeur : exp, cos, sin, cosh, sinh, $\frac{1}{1-x}$, $-\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$, $(1+x)^\alpha$;
- recherche des solutions DSE d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.

Intégrales généralisées (convergence uniquement, pas encore le calcul)

- définition d'une fonction continue par morceaux, structure d'ev ;
- définition de l'intégrale sur un segment d'une telle fonction (par Chasles) ;
- intégrale sur un intervalle non segment : définition de la convergence ;
- propriétés classiques des intégrales convergentes (linéarité, Chasles, croissance ...) ;
- absolue convergence, définition d'une fonction intégrable ;
- fonctions intégrables de référence : puissances en 0 ou $+\infty$, exponentielles en $\pm\infty$, ln en 0 ;
- règles d'équivalent, de Riemann, de domination ;
- définition d'une intégrale semi-convergente, exemple typique $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$;
- ev $\mathcal{L}^1(I)$, norme 1 ; ev $\mathcal{L}^2(I)$, produit scalaire et norme 2.

Preuves exigibles :

- primitivation d'une fonction entière ;
- dérivation d'une fonction entière ;
- existence et calcul du DSE de $(1+x)^{\alpha}$;
- semi-convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$.