

Colles de mathématique ψ^*

Programme 8 : 20 au 31 janvier

Intégrales généralisées

Programme précédent plus le calcul :

- intégration par parties, utilisation d'une constante de primitivation pour assurer la convergence du crochet ;
- changement de variable, conservation de la nature de l'intégrale (permet de justifier à posteriori une convergence) ;
- développement en série : interversion par convergence \mathcal{L}^1 (ie $\sum \int_I |f_n|$ converge), à défaut pour les séries géométriques méthode "à la main" ;
- intégrale d'une limite simple : théorème de convergence dominée.

Intégrales à paramètre

$F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ avec I intervalle quelconque de \mathbb{R} , x réel ou complexe.

- calcul du domaine de définition, noté J ;
- continuité : si $f(\cdot, t)$ est continue sur J et f est localement dominée par une fonction intégrable sur I , alors F est continue ;
- dérivabilité : si $D_1 f(\cdot, t)$ est définie et continue sur J et $D_1 f$ est localement dominée par une fonction intégrable sur I , alors F est \mathcal{C}^1 et $F'(x) = \int_I D_1 f(x, t) dt$;
- généralisation pour obtenir la classe de F ;
- limite aux bornes de J , par utilisation du critère séquentiel et du théorème de convergence dominée.

La fonction Γ n'est pas au programme.

Preuves exigibles :

- théorème de continuité des intégrales à paramètre ;
- calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$ par utilisation d'une suite d'approximations.