Colles de mathématique ψ^*
Programme 8 : 18 au 29 janvier

Intégrales généralisées

- définition d'une fonction continue par morceaux, structure d'ev ;
- définition de l'intégrale sur un segment d'une telle fonction (par Chasles) ;
- intégrale sur un intervalle non segment : définition de la convergence ;
- propriétés classiques des intégrales convergentes (linéarité, Chasles, croissance ...) ;
- absolue convergence, définition d'une fonction intégrable ;
- fonctions intégrables de référence : puissances en 0 ou $+\infty$, exponentielles en $\pm\infty$, ln en 0 ;
- règles d'équivalent, de Riemann, de domination ;
- définition d'une intégrale semi-convergente, exemple typique $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$;
- ev $\mathcal{L}^1(I)$, norme 1 ; ev $\mathcal{L}^2(I)$, produit scalaire et norme 2.
- intégration par parties, utilisation d'une constante de primitivation pour assurer la convergence du crochet ;
- changement de variable, conservation de la nature de l'intégrale (permet de justifier à posteriori une convergence) ;
- intégrale d'une limite simple : théorème de convergence dominée ;
- développement en série : interversion par convergence $\mathcal{L}^1$ (ie $\sum \int_I |f_n|$ converge), à défaut par convergence dominée des sommes partielles.

Intégrales à paramètre

$F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ avec I intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, x réel ou complexe.

- calcul du domaine de définition, noté J ;
- continuité : si $f(\cdot,t)$ est continue sur J et f est localement dominée par une fonction intégrable sur I, alors F est continue ;
- dérivabilité : si $D_1 f(\cdot,t)$ est définie et continue sur J et $D_1 f$ est localement dominée par une fonction intégrable sur I, alors F est $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = \int_I D_1 f(x,t)dt$;
- généralisation pour obtenir la classe de F ;
- limite aux bornes de J, par utilisation du critère séquentiel et du théorème de convergence dominée.

La fonction Γ n'est pas au programme, mais a été traitée en exemple.

Preuves exigibles :

- semi-convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$;
- calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$ par utilisation d'une suite d'approximations ;
- théorème de continuité des intégrales à paramètre.