Colles de mathématique ψ^*
Programme 8 : 17 au 28 janvier

Intégrales généralisées

Ajouter au programme précédent :

- théorème de convergence dominée : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, s'il existe ϕ dominant toutes les f_n , et si ϕ est intégrable sur I, alors f est intégrable et $\int_I f = \lim_{n\infty} \int_I f_n$;
- utilisation pour intervertir l'intégrale et la sommation dans le cas où à t fixé, $f_n(t)$ est géométrique : on peut appliquer le théorème à la suite des sommes partielles, qui sont explicitables.

Intégrales à paramètre

$F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ indépendant de x, qui est réel ou complexe.

- calcul du domaine de définition, noté J ;
- continuité : si chaque $f(\cdot,t)$ est continue et f est localement dominée par des fonctions intégrables, alors F est continue ;
- dérivabilité : si chaque $f(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^1$ et $D_1 f$ est localement dominée par des fonctions intégrables, alors F est $\mathcal{C}^1$;
- généralisation pour obtenir la classe de F ;
- utilisation du critère séquentiel et du théorème de convergence dominée pour obtenir la limite de F à une borne de J, dans le cas où cette limite est finie (pas de théorème, juste une méthode).

La fonction Γ n'est pas au programme mais a été traitée en exemple.

Preuves exigibles :

- calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$ par utilisation d'une suite d'approximations (attention c'est long) ;
- théorème de continuité des intégrales à paramètre ;
- classe de la fonction Γ.