Colles de mathématique ψ^*
Programme 9 : 1 au 12 février

1. Espaces probabilisés

- définition d'un ensemble dénombrable, dénombrabilité de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$;
- toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable, tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable ;
- définition d'une tribu, d'une probabilité sur une tribu, propriétés ;
- système complet d'évènements ;
- continuité monotone d'une probabilité ;
- définition d'une probabilité conditionnelle ;
- formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes ;
- indépendance mutuelle d'une famille d'évènements, situation typique : séries disjointes de tirages faits dans les mêmes conditions.

2. Variables aléatoires discrètes (VAD)

- définition d'une VAD ;
- si X est une VAD, alors $f(X)$ est une VAD ; tout tuple, produit, CL de VAD est une VAD ;
- loi d'une VAD X : couple $\big(\operatorname{Im} X, (\mathbb{P}(X=x))_{x\in\operatorname{Im} X}\big)$; $\sum_{x\in\operatorname{Im} X}\mathbb{P}(X=x)=1$;
- pour toute partie B de $\operatorname{Im} X$, $\mathbb{P}(X\in B)=\sum_{x\in B}\mathbb{P}(X=x)$.

3. VAD scalaires

En pratique elles seront presque toujours à valeurs entières (VAE).

- fonction de répartition, propriétés ;
- obtention de la répartition à partir de la loi, et réciproque dans le cas où X est entière ;
- définition de $\mathcal{L}^1(\Omega)$, de l'espérance d'une VAD scalaire ;
- linéarité de l'espérance ;
- si X est entière, alors $\mathbb{E}(X)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>n)$;
- théorème de transfert pour l'existence et le calcul de $\mathbb{E}(f(X))$.

En deuxième semaine uniquement (après les vacances) :

- définition de $\mathcal{L}^2(\Omega)$, de la variance et de l'écart type d'une VAD réelle ;
- König-Huygens : X a une variance ssi elle est dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, auquel cas $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$;
- variance de $aX + b$, variance d'une somme de variables indépendantes (provisoirement admis) ;
- lemme de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- fonction génératrice d'une VAE ;
- utilisation pour le calcul de l'espérance et la variance ; ;
- lois discrètes usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson ; pour chacune : situation typique, espérance, variance.

4. Preuves exigibles :

- théorème de continuité monotone ;
- si X est une VAD, alors $f(X)$ est une VAD ; tout tuple, produit, CL de VAD est une VAD ;
- si X est entière, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$.