

Colles de mathématique ψ^*

Programme 9 : 31 janvier au 11 février

1. Espaces probabilisés

- définition d'un ensemble dénombrable, dénombrabilité de \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{N}^2 ;
- toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable, tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable ;
- définition d'une tribu, d'une probabilité sur une tribu, propriétés ;
- système complet d'évènements ;
- continuité monotone d'une probabilité ;
- définition d'une probabilité conditionnelle ;
- formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes ;
- indépendance mutuelle d'une famille d'évènements, situation typique : séries disjointes de tirages faits dans les mêmes conditions.

2. Variables aléatoires discrètes (VAD)

- définition d'une VAD ;
- si X est une VAD, alors $f(X)$ est une VAD ; tout tuple, produit, CL de VAD est une VAD ;
- loi d'une VAD X : couple $(\text{Im } X, (\mathbb{P}(X = x))_{x \in \text{Im } X})$; $\sum_{x \in \text{Im } X} \mathbb{P}(X = x) = 1$;
- pour toute partie B de $\text{Im } X$, $\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x)$.

3. VAD scalaires

En pratique elles seront presque toujours à valeurs entières (VAE).

- fonction de répartition, propriétés ;
- obtention de la répartition à partir de la loi, et réciproque dans le cas où X est entière ;
- définition de $\mathcal{L}^1(\Omega)$, de l'espérance d'une VAD scalaire ;
- linéarité de l'espérance ;
- si X est entière, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$;
- théorème de transfert pour l'existence et le calcul de $\mathbb{E}(f(X))$.

4. Preuves exigibles :

- théorème de continuité monotone ;
- si X est une VAD, alors $f(X)$ est une VAD ; tout tuple, produit, CL de VAD est une VAD ;
- si X est entière, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$.