

# Colles de mathématique $\psi^*$

## Programme 10 : 17 février au 13 mars

### 1. Variables aléatoires réelles discrètes

Programme précédent plus : convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

### 2. Couples de VARD

- loi d'un couple, représentation matricielle ;
- marginalisation : récupération des lois de  $X$  et de  $Y$  à partir de la loi de  $(X, Y)$  ;
- indépendance mutuelle de VARD ; situation typique : les  $X_i$  concernent des séquences disjointes de tirages, faits dans les mêmes conditions ;
- si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  le sont aussi ;
- fonction génératrice d'une somme finie de VAE indépendantes ;
- espérance d'une somme ;
- si  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  (ie admettent une variance), alors  $XY$  est dans  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  (ie admet une espérance) ;
- espérance d'un produit de variables indépendantes ;
- covariance d'un couple, coefficient de corrélation ;
- variance d'une somme finie de VARD ;
- loi faible des grands nombres, évaluation statistique d'une probabilité.

### 3. En deuxième semaine uniquement : espaces préhilbertiens réels

- définition d'un produit scalaire, produits scalaires classiques sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathcal{CL}^2(I)$  ;
- inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, norme euclidienne ;
- formule de polarisation, identité du parallélogramme, Pythagore ;
- orthogonalité, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, toute famille de sev orthogonaux est en somme directe ;
- orthogonal d'une partie, propriétés ;
- projecteur orthogonal sur un sev  $F$  : CNS d'existence, CS d'existence ( $F$  de dimension finie) ;
- calcul de la projection orthogonale sur un sev dont on connaît une base, ON ou non ;

- la distance minimale de  $x$  à un sev  $F$  de dimension finie est atteinte en un unique point qui est sa projection orthogonale.

## Preuves exigibles :

- convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson ;
- espérance d'un produit de 2 VARD indépendantes ;
- loi faible des grands nombres.

En deuxième semaine, rajouter :

- inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité ;
- $d(x, F) = d(x, p_F(x))$  .