Colles de mathématique ψ^*
Programme 10 : 1 au 12 mars

1. Variables aléatoires réelles discrètes

Programme précédent plus : convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.

2. Couples de VARD

- loi d'un couple, représentation par un tableau ;
- marginalisation : récupération des lois de X et de Y à partir de la loi de (X, Y) ;
- indépendance mutuelle de VAD ; situation typique : les X_i concernent des séquences disjointes de tirages, faits dans les mêmes conditions ;
- si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi ;
- fonction génératrice d'une somme finie de VAE indépendantes ;
- si X et Y sont dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (ie admettent une variance), alors XY est dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ (ie admet une espérance) ;
- espérance d'un produit de VARD indépendantes, calcul par transfert si elles sont dépendantes ;
- covariance d'un couple, coefficient de corrélation ;
- variance d'une somme finie de VARD ;
- loi faible des grands nombres, évaluation statistique d'une probabilité.

3. En deuxième semaine uniquement : espaces préhilbertiens réels

- définition d'un produit scalaire, produits scalaires classiques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{CL}^2(I)$;
- inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, norme euclidienne ;
- formule de polarisation, identité du parallélogramme, Pythagore ;
- orthogonalité, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, toute famille de sev orthogonaux est en somme directe ;
- orthogonal d'une partie, propriétés ;
- projecteur orthogonal sur un sev F : CNS d'existence, CS d'existence (F de dimension finie) ;
- calcul de la projection orthogonale sur un sev dont on connait une base, ON ou non ;
- la distance minimale de x à un sev F de dimension finie est atteinte en un unique point qui est sa projection orthogonale.

Preuves exigibles :

- convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson ;
- espérance d'un produit de 2 VARD indépendantes ;
- loi faible des grands nombres.

En deuxième semaine, rajouter :

- inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité ;
- $d(x, F) = d(x, p_F(x))$.