

Colles de mathématique ψ^*

Programme 11 : 16 au 26 mars

1. Espaces euclidiens

- orthonormalisation d'une famille libre, forme de la matrice de passage ;
- existence de bases orthonormales (ON), bases ON adaptées à un sev, etc ;
- calculs en base ON : expression des coordonnées, coefficients de la matrice d'un endomorphisme, expression du produit scalaire, de la norme, de la projection orthogonale, de la distance à un sev ;
- représentation des formes linéaires par un produit scalaire ;
- dimension de l'orthogonal d'un sev et conséquences : $F \oplus F^\perp = E$, $F^{\perp\perp} = F$;
- distance euclidienne d'un point à un hyperplan, d'un point de \mathbb{R}^3 à une droite.

2. Endomorphismes et matrices symétriques

- définition d'un endomorphisme symétrique, caractérisation matricielle en base ON ;
- structure de sev et dimension de $\mathcal{S}(E)$;
- lemmes du théorème spectral : si F est un sev stable par u symétrique, alors F^\perp l'est aussi ; les sev propres sont orthogonaux ; le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} ;
- théorème spectral pour les endomorphismes symétriques, et version matricielle.

3. Isométries vectorielles

- définition, éléments propres, caractérisations : conservation de la norme euclidienne, conservation du produit scalaire, conservation des bases ON ;
- représentation en base ON, isomorphisme entre $\mathcal{O}(E)$ et \mathcal{O}_n , structure de groupe ;
- orientation d'un espace euclidien, produit mixte, produit vectoriel en dimension 3 ;
- classification des isométries en dimension 2, puis 3.

Preuves exigibles :

- représentation des formes linéaires par un produit scalaire ;
- le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique est scindé sur \mathbb{R} ;
- théorème spectral pour les endomorphismes symétriques.