

Mathématiques - Programme de colles 3

DU 5 AU 9 OCTOBRE

Nombres complexes et trigonométrie

a) Nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

Module. Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire.

Cercle trigonométrique. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.

Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a \cos b$, $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$.

Factorisation des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$. $\tan(a \pm b)$. Formules de l'arc moitié.

Formules d'Euler. Linéarisation. Formule de Moivre.

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Factorisation de $1 \pm e^{it}$.

b) Équations du second degré. Résolution des équations du second degré dans \mathbb{C} . Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique. Somme et produit des racines.

c) Racines n -ièmes. Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique. Notation \mathcal{U}_n ou \mathbb{U}_n . Représentation géométrique.

d) Exponentielle complexe. Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)}$.

e) Interprétation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-b}{c-a}$. Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$. Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

Question de cours (énoncés et démonstrations) :

- Démonstration de toute formule de trigonométrie à partir des formules d'additions.
- Inégalité triangulaire pour les nombres complexes.
- Racines carrées d'un nombre complexe (méthode trigonométrique ou méthode algébrique).
- Racines n -ièmes de l'unité.
- Somme des racines n -ièmes de l'unité.
- Racine n -ièmes d'un nombre complexe.
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes.
- Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$.
- Définition et dérivabilité de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$.

Savoir-faire :

- Tout calcul lié à la quantité conjuguée. Utilisation de toutes les propriétés de la conjugaison. Calcul d'un module à l'aide de la formule : $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Calculs sur les nombres complexes : forme trigonométrique, factorisation de $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$, calculs de sommes, linéarisation...
- Calculs de racines carrées par la méthode algébrique ou par la méthode trigonométrique, selon la situation.
- Calculs de racines n -ièmes par la méthode trigonométrique.
- Racines 2è, 3è et 4è de l'unité à connaître parfaitement.
- Résolution d'équations du second degré à coefficients dans \mathbb{C} .
- Traduire géométriquement l'alignement et la perpendicularité.