



# NOMBRES COMPLEXES

Les notes suivantes s'adressent essentiellement aux futurs étudiants de première année de CPGE n'ayant pas suivi l'enseignement de maths expertes en terminale, mais pourront être lues avec profit par tous, y compris ceux qui sont déjà familiers des nombres complexes.

Les complexes feront de nouveau l'objet d'un chapitre en première année, mais puisqu'ils seront dès le début d'année utilisés dans d'autres disciplines (en physique notamment), mieux vaut avoir dès la rentrée une certaine aisance avec les calculs en complexes.

## 0.1 L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

### 0.1.1 Définition, calculs sous forme algébrique

Les nombres réels<sup>1</sup> présentent une certaine disymétrie : les carrés sont toujours des nombres positifs.

En particulier, un réel strictement positif  $a$  possède toujours deux racines carrées<sup>2</sup>, à savoir  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ , alors qu'un réel strictement négatif ne possède aucune racine carrée.

Pour pallier à ceci, imaginons un nombre, que nous noterons  $i$ , tel que  $i^2 = -1$ .

Un tel nombre est purement imaginaire, et ne peut pas être un nombre réel : inutile de le chercher sur votre règle, ou de lui donner une signification géométrique quelconque, ce n'est ni une longueur, ni une aire.

À partir de ce nombre imaginaire  $i$ , il est possible de « créer » d'autres nombres, comme  $i + i = 2i$ ,  $-5i$ ,  $\frac{i}{2}$  ou encore  $1 - 2i$ .

La définition précise de l'ensemble  $\mathbf{C}$  des nombres complexes est hors-programme en sup, et nous nous contenterons d'admettre qu'il existe un ensemble noté  $\mathbf{C}$ , dont tous les éléments s'écrivent de manière unique sous la forme  $a + ib$ ,  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ , sur lequel sont définies deux opérations  $+$  et  $\times$ , satisfaisant aux mêmes règles de calcul que dans  $\mathbf{R}$  et vérifiant  $i^2 = -1$ .

Ainsi, si  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  sont deux éléments de  $\mathbf{C}$ , on a

$$\blacktriangleright z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$\blacktriangleright z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + i(ab' + a'b) + \underbrace{i^2}_{=-1} bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Il est également possible de diviser par un nombre complexe<sup>3</sup>, avec la même précaution que dans  $\mathbf{R}$  : on ne divise pas par 0.

On note  $\mathbf{C}^*$  l'ensemble des complexes non nuls.

<sup>1</sup> Ceux que vous manipulez depuis toujours.

<sup>2</sup> Un nombre dont le carré vaut  $a$ .

<sup>3</sup> Voir plus loin pour les détails.

#### Exemples 0.1 Premiers calculs

$$\blacktriangleright 1 + (-1 - i) = -i \text{ et } 2 + 3(4 + i) = 2 + 12 + 3i = 14 + 3i.$$

$$\blacktriangleright 2 + \frac{1}{2}(2 + i) = 2 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{i}{2} = 3 + \frac{i}{2}.$$

$$\blacktriangleright (1 + i) \times (5 - i) = 5 - i + 5i - i^2 = 5 + 4i - (-1) = 6 + 4i.$$

$$\blacktriangleright (1 + 2i)^2 = (1 + 2i)(1 + 2i) = 1 + 2i + 2i + (2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i.$$

Notons tout de suite que les identités remarquables usuelles restent valables dans  $\mathbf{C}$ , si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes, alors

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2, (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \text{ et } (z + z')(z - z') = z^2 - z'^2.$$

Ainsi, le calcul précédent s'écrit plus simplement

$$(1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times (2i) + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i.$$

► Les puissances de  $i$  sont aisées à calculer :

$$i^2 = -1, i^3 = (i^2) \times i = -i, i^4 = i^3 \times i = -i^2 = 1 \text{ puis } i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i, i^6 = i^4 \times i^2 = -1, \dots$$

►  $i \times (-i) = -i^2 = 1$ , si bien qu'en divisant par  $i$  les deux membres de l'égalité, on obtient  $\frac{1}{i} = -i$ .

Remarquons tout de suite que  $z + z' = z' + z$  et  $zz' = z'z$  (on dit alors que l'addition et la multiplication sont commutatives), ce qui découle du fait que la l'addition et la multiplication de réels sont des opérations commutatives.

L'écriture  $z = a + ib$ , avec  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  est appelée **forme algébrique** du complexe  $z$ .

L'unicité de l'écriture sous forme algébrique signifie que  $a + ib = a' + ib'$  si et seulement si

$$\text{on a à la fois } \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

**Définition 0.2** – Si  $z = a + ib \in \mathbf{C}$ , avec  $a, b \in \mathbf{R}$  alors on appelle :

- **partie réelle** de  $z$  le nombre réel  $a$ , que l'on note  $\operatorname{Re}(z)$
- **partie imaginaire** de  $z$  le nombre réel  $b$ , que l'on note  $\operatorname{Im}(z)$

On a donc  $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ .

Un nombre complexe est donc entièrement caractérisé par la donnée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Si  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , alors on confond le complexe  $z$  et le réel  $\operatorname{Re}(z)$ , de sorte qu'on considère que  $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ .

Un complexe  $z$  est donc un réel si et seulement si  $\operatorname{Im}(z) = 0$  c'est-à-dire  $z = \operatorname{Re}(z)$ . Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**.

On note  $i\mathbf{R}$  l'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble des  $ib$ ,  $b \in \mathbf{R}$ .

**Proposition 0.3** : Si  $z, z'$  sont deux nombres complexes, alors on a

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z').$$

*Démonstration.* Si  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ , avec  $a, a', b, b'$  des nombres réels, alors

$$z + z' = a + ib + a' + ib' = \underbrace{a + a'}_{\in \mathbf{R}} + i \underbrace{(b + b')}_{\in \mathbf{R}}$$

et donc par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire,

$$\operatorname{Re}(z + z') = a + a' = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = b + b' = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z').$$

□

Si  $z = a + ib$ , avec  $a, b$  réels, est un nombre complexe non nul<sup>4</sup> alors  $z$  possède un inverse

car si on note  $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$ , alors

$$zz^{-1} = (a + ib) \left( \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + i \left( -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = 1.$$

Ceci implique notamment que, à l'instar de ce qui se passe dans  $\mathbf{R}$ , si  $z$  et  $z'$  sont deux complexes tels que  $zz' = 0$ , alors  $z = 0$  ou  $z' = 0$ .

En effet, supposons que  $zz' = 0$ , et que  $z$  soit non nul. Alors en multipliant  $zz' = 0$  par  $z^{-1}$ , il vient

$$z^{-1}zz' = 0 \text{ donc } 1 \cdot z' = 0 \text{ et ainsi } z' = 0.$$

#### Autrement dit

Une égalité entre deux complexes signifie qu'on a deux égalités entre réels.

#### ⚠ Danger !

La partie réelle (resp. imaginaire) d'un produit n'est pas le produit des parties réelles (resp. imaginaires).

<sup>4</sup> C'est-à-dire tel que  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ .

#### Autrement dit

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Ceci nous permet également de définir la division de deux complexes en posant, pour  $z' \neq 0$ ,  $\frac{z}{z'} = z(z')^{-1}$ .

On notera en général  $\frac{1}{z}$  plutôt que  $z^{-1}$ .

#### Exemple 0.4

En utilisant les formules données ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1^2+1^2} - i \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}(1-i).$$

Et en effet, on a bien

$$(1+i) \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2}(1-i)(1+i) = \frac{1}{2}(1-i^2) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

En pratique, il ne sera pas nécessaire de connaître ces formules pour calculer l'inverse d'un nombre complexe (voir le corollaire 0.13 ci-dessous).

Comme pour les nombres réels, on a  $\frac{1}{\frac{z}{z'}} = \frac{z'}{z}$ , autrement dit, diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

#### Exemple 0.5

$$\frac{1+i}{\frac{2}{i}} = (1+i) \frac{i}{2} = \frac{i-1}{2}.$$

Enfin, les règles de calcul usuelles avec les fractions restent valables pour les quotients de nombres complexes :

- ▶ pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateur et dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} \times \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

- ▶ pour ajouter deux fractions, on commence par une mise au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

#### ⚠ Attention !

On n'ajoute surtout pas les numérateurs et les dénominateurs : la formule

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

est aussi fautive pour les complexes qu'elle l'est pour les réels.

#### Exemples 0.6

- ▶  $\frac{6+3i}{1+i} \times \frac{6-3i}{i} = \frac{(6+3i)(6-3i)}{i(1+i)} = \frac{36-9i^2}{i+i^2} = \frac{45}{-1+i}$ .
- ▶  $\frac{1+2i}{4-i} + \frac{3}{2+i} = \frac{(1+2i)(2+i) + 3(4-i)}{(4-i)(2+i)} = \frac{2+4i+i+2i^2+12-3i}{8+2i-i^2} = \frac{12+2i}{9+2i}$ .



On n'écrira pas d'inégalités entre nombres complexes, il n'y a pas de notion naturelle de supérieur/inférieur sur les complexes.

Donc les inégalités  $2+i \leq -3+2i$  et  $-3 \leq 2+i$  ne sont ni vraies ni fausses, elles n'ont tout simplement **aucun sens**.

On n'utilisera donc des inégalités que pour les nombres réels, comme vous le faisiez jusqu'à présent.

## 0.1.2 Représentation géométrique des nombres complexes

Tout comme un point dans le plan, un nombre complexe est caractérisé par la donnée de deux nombres réels : pour un point il s'agit de l'abscisse et de l'ordonnée, pour un complexe il s'agit de la partie réelle et de la partie imaginaire.

Ceci permet de faire correspondre à chaque point du plan un unique nombre complexe.

**Définition 0.7** – Considérons un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Alors tout point  $M$  est caractérisé de manière unique par ses coordonnées  $(x, y)$ .  
 Si  $M$  a pour coordonnées  $(x, y)$ , on dit que le complexe  $z = x + iy$  est l'**affiche** de  $M$ .  
 On dit également que  $M$  est l'**image** du complexe  $z = x + iy$ .  
 De même, si  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  est un vecteur du plan, on dit que le complexe  $z = x + iy$  est l'afixe de  $\vec{u}$ .

Les réels sont donc les complexes dont l'image est située sur l'axe des abscisses, et les imaginaires purs ceux dont l'image est situé sur l'axe des ordonnées.

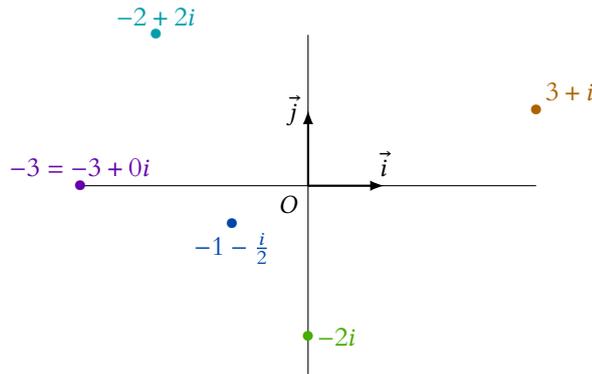


FIGURE 0.1 – L'image de quelques complexes dans le plan.

### 0.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition 0.8** – Si  $z = a + ib$  est un complexe, avec  $a, b$  réels, alors le complexe  $\bar{z} = a - ib$  est appelé **nombre conjugué**<sup>5</sup> de  $z$ .  
 Autrement dit,  $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$ .

<sup>5</sup> Ou plus simple conjugué.

Géométriquement, l'image de  $\bar{z}$  est le symétrique du point d'affixe  $z$  par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

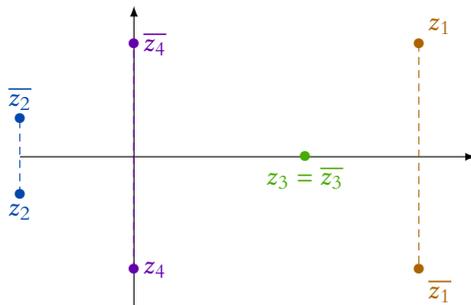


FIGURE 0.2 – Quelques complexes et leurs conjugués (on confond ici un complexe et son image dans le plan).

*Remarques.* ► Un complexe  $z$  est réel si et seulement si  $z = \bar{z}$ .

► De même,  $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ .

► Notons tout de suite que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{\bar{z}} = z$ .

En effet, si  $z = a + ib$ , alors  $\bar{z} = a - ib$  et donc  $\overline{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a - i(-b) = a + ib$ .

#### Géométriquement

Un point est invariant par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si il est sur cet axe.

**Proposition 0.9 :** Si  $z$  et  $z'$  sont deux complexes, alors

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \text{ et } \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

De plus, si  $z \neq 0$ , alors  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$  et plus généralement,  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$ .

*Démonstration.* Notons  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  sous forme algébrique<sup>6</sup>. Alors

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \bar{z} + \bar{z}'.$$

De même,

$$\overline{zz'} = \overline{(a - ib)(a' - ib')} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b) = (aa' - bb') + i(a'b + ab') = \bar{z}\bar{z}'.$$

Et si  $z \neq 0$ , en utilisant le point précédent, on a

$$\frac{1}{z} \bar{z} = \frac{1}{z} z = \bar{1} = 1.$$

Et donc  $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ .

Enfin, en combinant les deux formules précédentes,

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{z' \frac{1}{z}} = \bar{z}' \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{z}' \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}.$$

□

**Proposition 0.10 :** Si  $z \in \mathbf{C}$ , alors  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$  et  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ .

*Démonstration.* Si  $z = a + ib$  est la forme algébrique de  $z$ ,  $\bar{z} = a - ib$  de sorte que  $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$ .

Et  $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i \operatorname{Im}(z)$ . □

### 0.1.4 Module d'un nombre complexe

**Définition 0.11** – Si  $z = a + ib \in \mathbf{C}$ , avec  $a, b$  réels, on appelle **module de  $z$**  le réel positif défini par  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ .

Géométriquement,  $|z|$  n'est autre que la longueur du segment joignant l'origine  $O$  au point d'affixe  $z$ .

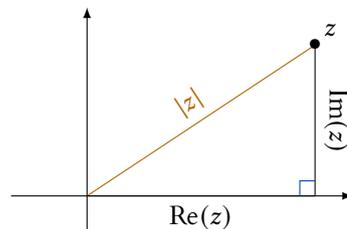


FIGURE 0.3 – Le module d'un complexe. Merci Pythagore !

En particulier, si  $z$  est un réel, alors  $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} = \sqrt{z^2}$  est égal à la valeur absolue de  $z$ .

**Proposition 0.12 :** Si  $z \in \mathbf{C}$ , alors  $z\bar{z} = |z|^2$ .

<sup>6</sup> Donc avec  $a, b, a', b'$  des réels.

#### Remarque

Ceci justifie qu'on utilise la même notation pour le module et la valeur absolue, puisque dans le cas d'un réel, ces deux notations désignent la même quantité.

*Démonstration.* C'est un simple calcul, si  $z = a + ib$ , alors,

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - \underbrace{i^2}_{=-1} b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

□

**Corollaire 0.13** – Si  $z \in \mathbb{C}^*$ , alors  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

Cette formule s'écrit encore, si  $z = a + ib$ , sous la forme  $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ .

### Exemples 0.14

►  $\frac{1}{i} = \frac{1-i}{i-i} = \frac{-i}{-i^2} = -i.$

►  $\frac{1}{3-2i} = \frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i}{9-(2i)^2} = \frac{3+2i}{9+4} = \frac{1}{13}(3+2i).$

► La forme algébrique du quotient de deux nombres complexes peut toujours se calculer en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Ainsi, on a

$$\frac{2-i}{1-i} = \frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2-i+2i-i^2}{1^2-i^2} = \frac{3+i}{2}.$$

Et de même,

$$\begin{aligned} \frac{5-4i}{\frac{1}{2}+2i} &= \frac{(5-4i)\left(\frac{1}{2}-2i\right)}{\left(\frac{1}{2}+2i\right)\left(\frac{1}{2}-2i\right)} = \frac{\frac{5}{2}-10i-2i+8i^2}{\frac{1}{4}-4i^2} = \frac{-\frac{11}{2}-12i}{\frac{17}{4}} \\ &= \left(-\frac{11}{2}-12i\right) \frac{4}{17} = \frac{-22-48i}{17}. \end{aligned}$$

### Proposition 0.15 (Propriétés du module) :

1. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
2. Si  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $|\bar{z}| = |z|$ . De plus, on a  $z = 0$  si et seulement si  $|z| = 0$ .
3. Si  $z, z'$  sont deux complexes, alors  $|zz'| = |z| \cdot |z'|$  et si  $z' \neq 0$ ,  $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ .

En particulier,  $|-z| = |z|$  et  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = a + ib$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Alors  $|\operatorname{Re}(z)|^2 = |a|^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 \leq |z|^2$ .

Et donc par croissance de la racine carrée,  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ .

De même,  $|\operatorname{Im}(z)| = |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |z|$ .

2. Si  $z = a + ib$ , alors  $\bar{z} = a - ib$ , de sorte que  $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ .

De plus, on a  $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$ .

Or, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls, donc

$$|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0.$$

3. On a

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\bar{z}z'\bar{z}' = |z|^2|z'|^2.$$

#### Cas d'égalité

On a alors  $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$  si et seulement si  $b = 0$ , soit si et seulement si  $z \in \mathbb{R}$ .

#### Géométriquement

Le seul point à distance nulle de l'origine est l'origine.

Mais des modules sont toujours positifs, donc en passant à la racine,

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|.$$

En particulier, pour  $z \neq 0$ , il vient  $\left| \frac{1}{z} \right| |z| = \left| z \frac{1}{z} \right| = |1| = 1$ .

Et donc  $\frac{1}{|z|} = \left| \frac{1}{z} \right|$ .

On en déduit que si  $z' \neq 0$ ,

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \frac{1}{z'} \right| = \left| \frac{1}{z'} \right| |z| = \frac{1}{|z'|} |z| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

□

En revanche, les choses se passent moins bien pour la somme, et le module d'une somme n'est que rarement la somme des modules. Par exemple,  $|1 + i| = \sqrt{2} \neq |1| + |i|$ . Plus précisément, on dispose de l'inégalité suivante.

**Théorème 0.16 (Inégalité triangulaire) :** Si  $z_1, z_2$  sont deux nombres complexes, alors

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si  $z_1 = 0$  ou s'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  tel que  $z_2 = \lambda z_1$ .

#### Cas d'égalité

Le cas d'égalité signifie que les vecteurs d'affixes  $z_1$  et  $z_2$  sont colinéaires et de même sens.

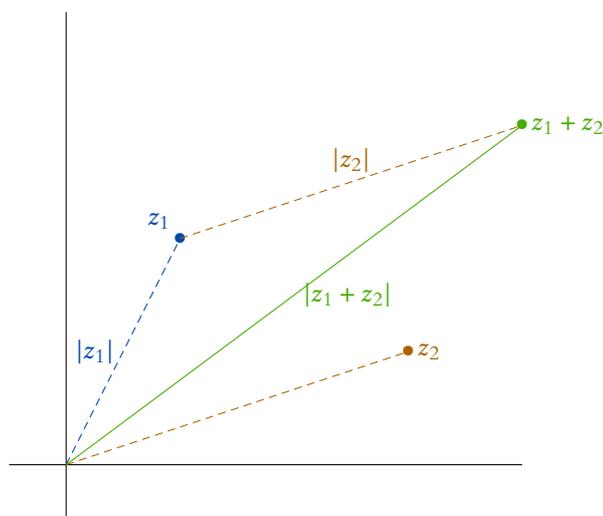


FIGURE 0.4 – L'inégalité triangulaire : dans un triangle, la longueur d'un côté est plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1} z_2} + \overline{z_1} z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2 |\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2 |\overline{z_1} z_2| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2 \\ &\leq (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Donc  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

De plus il y a égalité si et seulement si chacune des inégalités ci-dessus est une égalité, soit si et seulement si  $|\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)| = \operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)$  et  $|\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)| = |\overline{z_1}z_2|$ .

La première condition équivaut au fait que  $\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)$  soit positif, et la seconde au fait que  $\overline{z_1}z_2$  soit réel.

Donc au final, il y a égalité si et seulement si  $\overline{z_1}z_2 \in \mathbf{R}_+$ .

Si  $z_1 = 0$ , alors il y a égalité.

Si  $z_1 \neq 0$ , si il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, alors il existe  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  tel que  $\overline{z_1}z_2 = \lambda$

$$\text{et donc } z_2 = \lambda \frac{1}{\overline{z_1}} = \underbrace{\frac{\lambda}{|z_1|^2}}_{\geq 0} z_1.$$

Et inversement, si  $z_2 = \lambda z_1$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}_+$ , alors  $z_1 + z_2 = (1 + \lambda)z_1$  et donc

$|z_1 + z_2| = (1 + \lambda)|z_1| = |z_1| + \lambda|z_1| = |z_1| + |z_2|$ , donc l'inégalité triangulaire est une égalité.

Au final, il y a bien égalité si et seulement si  $z_1 = 0$  ou s'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  tel que  $z_2 = \lambda z_1$ .  $\square$

**Corollaire 0.17** – *Quels que soient les complexes  $z$  et  $z'$ , on a  $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$ .*

*Démonstration.* La preuve est la même que dans le cas réel.  $\square$

Notons qu'en utilisant à la fois l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée, et en changeant  $z'$  en son opposé, on arrive à

$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|.$$

Le corollaire suivant est une généralisation de l'inégalité triangulaire à une somme de  $n$  nombres complexes. Sa preuve peut être omise en première lecture, notamment si vous n'êtes pas à l'aise avec le symbole  $\sum$ .

**Corollaire 0.18** – *Si  $z_1, \dots, z_n$  sont des complexes, alors  $\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$ .*

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}^*$ , comme pour le cas réel. Si  $n = 1$  c'est évident, et si  $n = 2$ , c'est le théorème précédent.

Supposons donc que pour tous complexes  $z_1, \dots, z_n$ ,  $\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$  et soient  $z_1, \dots, z_{n+1}$   $n + 1$  nombres complexes. Alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n+1} z_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n z_i + z_{n+1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| + |z_{n+1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |z_i| + |z_{n+1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|. \end{aligned}$$

C'est le théorème précédent.

Hypothèse de récurrence.

Donc par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et pour tous complexes  $z_1, \dots, z_n$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|. \quad \square$$

Donnons enfin une interprétation géométrique du module de  $|z_1 - z_2|$  où  $z_1$  et  $z_2$  sont deux complexes.

### Terminologie

Cette inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire renversée.

Notons  $z_1 = x_1 + iy_1$  et  $z_2 = x_2 + iy_2$  les formes algébriques de  $z_1$  et  $z_2$ , donc avec  $x_1, x_2, y_1, y_2$  réels.

Soient alors  $A_1(x_1, y_1)$  et  $A_2(x_2, y_2)$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ .

La distance entre  $A_1$  et  $A_2$  est donc  $A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

Or, on a également

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Donc  $|z_1 - z_2|$  est la distance entre les points d'affixes  $z_1$  et  $z_2$ .

## 0.2 FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Souvenons-nous qu'il est possible d'identifier les nombres complexes aux points du plan. Le plus simple pour caractériser un point du plan est de se donner son abscisse et son ordonnée, ce qui en termes de nombres complexes, correspond à la partie réelle et la partie imaginaire. C'est ce que nous avons appelé la forme algébrique d'un complexe. Elle est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, mais les calculs de produits ou de quotients sont plus désagréables.

Mais il existe un autre moyen de repérer un point  $M$  du plan : il suffit de se donner sa distance à l'origine, ainsi que l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .

En effet, si  $OM = r$ , alors  $M$  est sur le cercle  $\mathcal{C}_r$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ , et si on note  $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ , alors  $M$  est le seul point de  $\mathcal{C}_r$  pour lequel  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ .

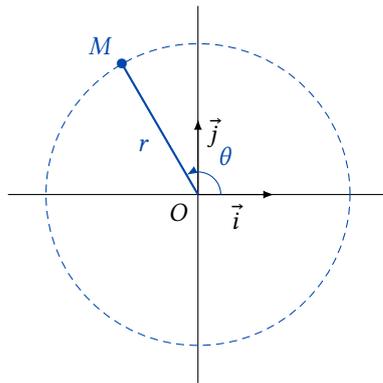


FIGURE 0.5 – Un point du plan est repéré par un rayon et un angle.

Puisque dans cette partie nous allons être amenés à manipuler des angles, profitons-en pour introduire une notation que vous avez peut-être déjà manipulée au lycée.

Vous savez qu'un angle est bien défini «à  $2\pi$  près», au sens où  $\theta, \theta + 2\pi$  et  $\theta - 4\pi$  définissent les mêmes angles.

Si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont deux réels, on notera alors  $\theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi]$  s'il existe un entier relatif  $k \in \mathbf{Z}$  tel que  $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ . Autrement dit, si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  définissent les mêmes angles.

Par exemple,  $\frac{\pi}{2} \equiv \frac{5\pi}{2} [2\pi]$  et  $-\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{10\pi}{3} [2\pi]$ .

### Terminologie

On dit que  $z_1$  et  $z_2$  sont congrus modulo  $2\pi$ .

### 0.2.1 L'ensemble des nombres complexes de module 1

**Définition 0.19** – On note  $\mathbf{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}.$$

*Remarque.* Si  $z$  est un complexe non nul, alors  $\frac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$ .

En effet,  $\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{1}{|z|} |z| = 1$ .

### Autrement dit

$\mathbf{U}$  est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

**Exemples 0.20**

►  $1, i, -i$  et  $-1$  sont dans  $\mathbf{U}$ .

Puisque  $|1+i| = \sqrt{2}$ ,  $1+i \notin \mathbf{U}$  mais  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \in \mathbf{U}$ .

► Soit  $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ . Alors  $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbf{R}$  si et seulement si  $z \in \mathbf{U}$ .

En effet, on a  $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2 - z + \bar{z} - 1}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2} - i \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z-1|^2}$ .

Et donc ce nombre est imaginaire pur si et seulement si  $|z|^2 - 1 = 0$ , soit si et seulement si  $|z| = 1$  c'est-à-dire lorsque  $z \in \mathbf{U}$ .

**Proposition 0.21 :**  $1 \in \mathbf{U}$  et pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$ ,  $z_1 z_2 \in \mathbf{U}$  et  $\frac{1}{z_1} \in \mathbf{U}$ .

*Démonstration.* Cela découle directement des propriétés du module. □

**Proposition 0.22 :** Si  $z \in \mathbf{C}$  est non nul, alors  $z \in \mathbf{U}$  si et seulement si  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ .

*Démonstration.* Nous savons que  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  et donc  $\frac{1}{z} = \bar{z} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}$ . □

**En particulier**

L'inverse de  $i$  est son conjugué  $-i$ .

**0.2.2 Notation  $e^{i\theta}$** 

**Proposition 0.23 :** Soit  $z \in \mathbf{U}$ . Alors il existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tel que  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ . Un tel réel  $\theta$  est appelé **un argument de  $z$** .

*Démonstration.* Soit  $z = a + ib$  un élément de  $\mathbf{U}$ . Alors  $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$ .

Autrement dit,  $(a, b)$  appartient au cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$ .

Mais alors il existe  $\theta \in \mathbf{R}$ , unique modulo  $2\pi$ , tel que  $(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

Et donc  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ . □

**Terminologie**

Il existe une infinité de tels réels  $\theta$ , donc on veillera bien à dire **un** argument, et pas l'argument.

**Définition 0.24 –** Pour  $\theta \in \mathbf{R}$ , on note  $e^{i\theta}$  le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

*Remarques.* ► Notons qu'en particulier,  $e^{i0} = 1$ . Et plus généralement, pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $e^{2ik\pi} = 1$ .

On a également  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  et  $-1 = e^{i\pi}$ .

Cette dernière formule s'écrit encore  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

► Avec cette notation,  $\mathbf{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}\}$ .

Graphiquement, le point  $M_\theta$  d'affixe  $e^{i\theta}$  est le point du cercle trigonométrique tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta$ .

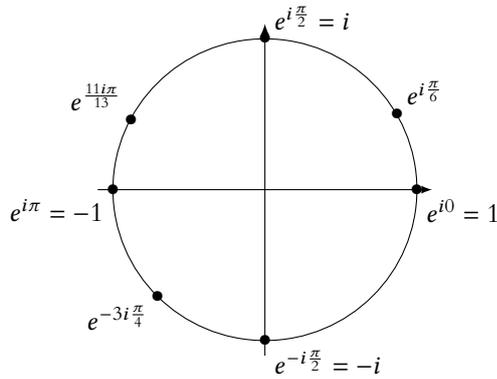


Pour l'instant il ne s'agit que d'une notation, et a priori, rien ne justifie qu'il existe un quelconque rapport avec la fonction exponentielle que nous utilisons en analyse.

Il y a bien un lien entre les deux, mais il ne sera clarifié qu'en seconde année de prépa.

En particulier, vous noterez bien que je n'ai à aucun moment défini ce que serait le logarithme d'un nombre complexe,

Pour l'instant, contentons-nous de constater que  $e^{i\theta}$  partage bien des propriétés avec l'exponentielle réelle dont nous avons l'habitude :



**Proposition 0.25 :** Soient  $\theta, \theta_1, \theta_2$  des réels. Alors

1.  $|e^{i\theta}| = 1$ . Et donc,  $e^{i\theta} \in \mathbf{U}$
2.  $\forall k \in \mathbf{Z}, e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
3.  $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$  si et seulement si  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$
4.  $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
5.  $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ , donc  $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ .
6.  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ .

<sup>7</sup>  $e^{i\theta} \in \mathbf{U}$ , donc son inverse est égal à son conjugué.

*Démonstration.* 1. On a

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1.$$

2. Pour  $k \in \mathbf{Z}$ , on a, par  $2\pi$ -périodicité des fonctions cos et sin

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

3. Nous savons qu'à tout point du cercle trigonométrique correspond un unique  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . Autrement dit, pour  $\theta_1, \theta_2 \in ]-\pi, \pi]$ , on a  $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$  si et seulement si  $\theta_1 = \theta_2$ .

Mais il existe un (unique) entier  $k_1$  tel que  $\theta_1 + 2k_1\pi \in ]-\pi, \pi]$  et de même il existe un unique entier  $k_2$  tel que  $\theta_2 + 2k_2\pi \in ]-\pi, \pi]$ .

Si  $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ , alors  $e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+2k_1\pi)} = e^{i(\theta_2+2k_2\pi)}$  de sorte que

$$\theta_1 + 2k_1\pi = \theta_2 + 2k_2\pi \text{ et donc } \theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

La réciproque est évidente d'après le point précédent.

4. Il s'agit d'utiliser les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

5. On a  $e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = 1$ . Et donc  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ .

Et puisque  $e^{i\theta}$  est de module 1, son inverse est égal à son conjugué, de sorte que

$$\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

6.  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ .

□

#### Astuce

Si on utilise ici les formules d'addition pour prouver le résultat, c'est un bon moyen de les retrouver si on les oublie :  $\cos(\theta_1 + \theta_2)$  est la partie réelle de  $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$ .

## 0.2.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe, argument(s)

**Proposition 0.26 :** Soit  $z \in \mathbf{C}$ . Alors il existe  $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$  tel que

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

On a alors  $r = |z|$ , et si  $z \neq 0$ , alors  $\theta$  est unique modulo  $2\pi$ , autrement dit si  $r_1, r_2$  sont deux réels strictement positifs, et si  $\theta_1, \theta_2$  sont deux réels tels que  $z = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ , alors  $r_1 = r_2 = |z|$  et  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ .

*Démonstration.* Si  $z = 0$ , alors pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $z = 0e^{i\theta}$ .

Et si  $z \neq 0$ , alors  $\frac{z}{|z|}$  est de module 1, donc dans  $\mathbf{U}$ .

Par conséquent, il existe  $\theta$  tel que  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$  donc  $z = \underbrace{|z|}_{\in \mathbf{R}_+} e^{i\theta}$ .

Si  $z \in \mathbf{C}$  s'écrit  $z = re^{i\theta}$ , avec  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ , alors  $|z| = |r| \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} = r$ .

Et donc pour  $z \neq 0$ , si  $z = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ , alors  $r_1 = r_2 = |z| \neq 0$ , de sorte que  $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$  et donc  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ .  $\square$

L'écriture  $z = re^{i\theta}$ , avec  $r \in \mathbf{R}_+$  est appelée **forme exponentielle** de  $z$ .

Notons que cette écriture est particulièrement bien adaptée au calcul de produits, puisque si  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  et  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , alors  $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ .



Méfions tout de même d'une chose :  $r$  doit être positif, et pas seulement réel !

Par exemple,  $z = -2e^{i\pi/6}$  n'est pas une forme exponentielle, car son module ne peut valoir  $-2$ .

En revanche, en notant que  $-1 = e^{i\pi}$ , alors  $z = 2e^{7i\pi/6}$ , qui est bien une écriture sous forme exponentielle, avec 2 pour module.

*Remarque.* Notons que si  $z = re^{i\theta}$ , alors  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , cette écriture étant parfois appelée **forme trigonométrique** du complexe  $z$ .

On lui préférera toutefois la forme exponentielle, qui lui est équivalente et est plus facile à manipuler.

**Définition 0.27** – Soit  $z \in \mathbf{C}$ . On appelle **argument** de  $z$  tout réel  $\theta$  tel que  $z = |z|e^{i\theta}$ .

Si  $z$  est non nul, et possède  $\theta$  comme argument, alors les arguments de  $z$  sont exactement les éléments de  $\theta + 2\pi\mathbf{Z} = \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ .

En revanche,  $z \in \mathbf{C}^*$  possède un unique argument dans  $] -\pi, \pi]$ , qu'on appelle **argument principal** de  $z$ , et qu'on note  $\arg(z)$ .

### Méthode

Bien qu'il soit possible de calculer des produits/quotients de complexes sous forme algébrique, on privilégiera autant que possible la forme exponentielle.

### Autrement dit

Deux arguments de  $z$  sont congrus modulo  $2\pi$ .

*Remarques.* ► Géométriquement, si  $M$  est le point d'affixe  $z \neq 0$ , alors  $\arg(z)$  est l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .

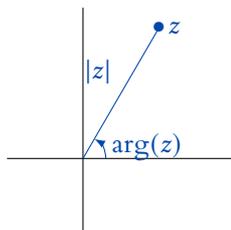


FIGURE 0.6 – Interprétation graphique de la forme exponentielle d'un complexe.

Puisque  $|z|$  est la distance  $OM$ , définir un complexe par sa forme exponentielle  $re^{i\theta}$ , c'est définir  $M$  par sa distance à l'origine et l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .

Et de même, si  $\vec{u}$  a pour affixe  $z = re^{i\theta}$ , alors  $r = \|\vec{u}\|$  et  $\theta \equiv \left(\vec{i}, \vec{u}\right) [2\pi]$ .

► Un complexe non nul  $z$  est un réel positif si et seulement si  $\arg(z) = 0$  et c'est un réel négatif si et seulement si  $\arg(z) = \pi$ .

Enfin,  $z \in i\mathbf{R}$  si et seulement si  $\arg(z) = \pm \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

**Exemples 0.28**

►  $-i = 0 - i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ .

Ceci est cohérent avec le fait que  $-i = \frac{1}{i} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ .

► Soit  $z = 1 + i$ . Alors  $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

Et alors

$$z = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc  $\frac{\pi}{4}$  est un argument de  $z$ , et même l'argument principal de  $z$ .

► Soit  $z = \sqrt{3} - 3i$ . Alors  $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

Et donc

$$z = 2\sqrt{3} \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Donc  $-\frac{\pi}{3}$  est l'argument principal de  $z$ .

Notons que  $\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$  est également un argument de  $z$ .

**Proposition 0.29 :** Soient  $z, z'$  deux complexes non nuls. Alors

1.  $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

2.  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$

3.  $\forall n \in \mathbf{Z}, \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$

*Démonstration.* 1. Si  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$ , alors  $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ , de sorte que  $\theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$  est un argument de  $zz'$ . Et donc est congru à  $\arg(zz')$  modulo  $2\pi$ .

2. Si  $z = re^{i\theta}$ , alors  $\bar{z} = re^{-i\theta}$ . Et donc  $-\theta$  est un argument de  $\bar{z}$ . Notons que sauf si  $\theta = \pi$ ,  $-\arg(z)$  est dans  $] -\pi, \pi[$  et donc est égal à  $\arg(\bar{z})$ .

3. Si  $n \geq 0$ , la preuve se fait par récurrence en utilisant le point 1.

Et si  $n < 0$ , il suffit de noter que  $z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n}$ , avec  $-n \geq 0$ . Et donc

$$\arg(z^n) \equiv -n \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv n \arg(z) [2\pi].$$

□

Revenons sur le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : si  $z_1 \neq 0$  alors nous avons prouvé que  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  tel que  $z_2 = \lambda z_1$ .

Mais alors, si  $z_1 = re^{i\theta_1}$ , il vient donc  $z_2 = \underbrace{\lambda r}_{\in \mathbf{R}_+} e^{i\theta_1}$ .

Et donc  $z_1$  et  $z_2$  ont même argument  $\theta_1$ .

Et inversement, si  $z_1$  et  $z_2$  ont même argument  $\theta$ ,  $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ ,  $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$  et donc en

**Méthode**

Déterminer un argument d'un complexe non nul  $z$ , c'est déterminer un  $\theta \in \mathbf{R}$  tel que  $z = |z|e^{i\theta}$ , soit encore  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ .

On commencera donc systématiquement par calculer  $|z|$ , puis par factoriser  $z$  par ce module de manière à obtenir un complexe de module 1, qui est donc de la forme  $e^{i\theta}$ , la valeur de  $\theta$  restant à déterminer.

**Terminologie**

Avez-vous bien saisi la subtilité ? Un argument et pas l'argument, mais si on parle d'argument principal, alors il y en a un seul, qu'on appelle donc l'argument principal.

**Égal ou congru ?**

Si  $\arg(z) + \arg(z') \in ] -\pi, \pi[$  alors c'est l'argument principal de  $zz'$ , mais sinon il faut ajouter  $\pm 2\pi$  à  $\theta + \theta'$  pour tomber dans l'intervalle  $] -\pi, \pi[$ .

posant  $\lambda = \frac{|z_2|}{|z_1|} \in \mathbf{R}_+$ , on a  $z_2 = \lambda z_1$ , et donc il y a égalité dans l'inégalité triangulaire.

On retiendra donc que  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  si et seulement si  $z_1 z_2 = 0$ , ou si  $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ .

## 0.2.4 Formules de Moivre et d'Euler

**Proposition 0.30 (Formules d'Euler) :** Soit  $\theta \in \mathbf{R}$ . Alors

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

*Démonstration.* C'est un simple calcul :  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2 \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = 2 \cos \theta$  et de même

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = 2i \sin \theta.$$

□

### Exemples 0.31 Factorisation par l'angle moitié

Il est souvent judicieux de factoriser  $e^{ia} \pm e^{ib}$  par  $e^{i(a+b)/2}$ .

Par exemple, on a

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i(a+b)/2} \left( e^{i(a-b)/2} - e^{i(b-a)/2} \right) = e^{i(a+b)/2} \left( e^{i(a-b)/2} - e^{-i(a-b)/2} \right) = 2i \sin \left( \frac{a-b}{2} \right) e^{i(a+b)/2}.$$

Ceci permet notamment d'obtenir à peu de frais le module et un argument de  $e^{ia} \pm e^{ib}$ .

Par exemple

$$e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} \left( e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} \right) = 2 \cos \left( \frac{\pi}{24} \right) e^{i\frac{5\pi}{24}}.$$

Puisque  $2 \cos \left( \frac{\pi}{24} \right) > 0$ , c'est bien un module, et on a donc

$$\left| e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{4}} \right| = 2 \cos \left( \frac{\pi}{24} \right) \text{ et } \arg \left( e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{5\pi}{24}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\frac{\pi}{6}} &= e^{i0} - e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}} \left( e^{-i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = -2i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &= 2 \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) e^{-i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

si bien que  $\left| 1 - e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 2 \sin \left( \frac{\pi}{12} \right)$  et  $\arg \left( 1 - e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = -\frac{5\pi}{12}$ .

Cette astuce permet notamment de retrouver certaines formules de trigonométrie : si  $\theta, \theta'$  sont deux réels, alors  $\cos \theta + \cos \theta'$  est la partie réelle de  $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ . Mais

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left( e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos \frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Mais la partie réelle du membre de droite est  $2 \cos \frac{\theta+\theta'}{2} \cos \frac{\theta-\theta'}{2}$  et donc

$$\cos \theta + \cos \theta' = 2 \cos \frac{\theta+\theta'}{2} \cos \frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Détails

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

**Exemple 0.32** Application à la trigonométrie : linéarisation

Linéarisons  $\sin^3(\theta)$ , c'est-à-dire essayons de l'écrire comme somme de fonctions de la forme  $\theta \mapsto \cos(k\theta)$  ou  $\theta \mapsto \sin(k\theta)$ . On a

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{-8i} \left( e^{2i\theta} - \underbrace{2e^{i\theta}e^{-i\theta}}_{=1} + e^{-2i\theta} \right) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{-8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{-8i} (2i \sin(3\theta) - 6i \sin(\theta)) \\ &= \frac{3}{4} \sin(\theta) - \frac{1}{4} \sin(3\theta).\end{aligned}$$

Cette écriture est particulièrement intéressante lorsqu'on cherche à déterminer une primitive de  $\theta \mapsto \sin^3 \theta$ . Une telle primitive est par exemple

$$\theta \mapsto -\frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{12} \cos(3\theta).$$

**Proposition 0.33 (Formule de Moivre) :** Soit  $\theta \in \mathbf{R}$ . Alors

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

*Démonstration.*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

□

**0.3 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS**

Nous savons déjà que  $i$  est un nombre dont le carré vaut  $-1$ , autrement dit, une racine carrée de  $-1$ . Mais alors  $(2i)^2 = 4i^2 = -4$ , si bien que  $2i$  est une racine carrée de  $-4$ . Et de même,  $(-2i)^2 = -4$ , donc  $-2i$  est également une racine carrée de  $-4$ .

Plus généralement, si  $a$  est un réel strictement négatif, alors il existe deux racines carrées de  $a$  dans  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire deux nombres complexes qui élevés au carré valent  $a$ . Il s'agit de  $i\sqrt{-a}$  et  $-i\sqrt{-a}$ .

Ce sont même les seuls, puisque si  $z \in \mathbf{C}$ , alors

$$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = (i\sqrt{-a})^2 \Leftrightarrow z^2 - (i\sqrt{-a})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{-a} \text{ ou } z = -i\sqrt{-a}.$$

Ainsi, tout nombre réel possède au moins une racine carrée complexe.

Ceci nous autorise alors à chercher également les solutions complexes à des équations polynomiales du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ , avec  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

Si la méthode ne va pas du tout changer par rapport à ce que vous avez appris en première, la principale différence va venir du fait que même si le discriminant  $\Delta$  est négatif, l'équation possédera toujours des solutions complexes.

**Notation**

Même si on a très envie de noter  $i = \sqrt{-1}$ , nous ne le ferons pas, et continuerons de réserver les notations  $\sqrt{x}$  ou  $x^{1/2}$  au seul cas où nous les connaissons déjà : le cas où  $x$  est un réel positif.

**Théorème 0.34 :** Soient  $a, b, c$  trois réels avec  $a \neq 0$  et soit  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

1. Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation  $az^2 + bz + c = 0$ , d'inconnue  $z$  possède une unique solution dans  $\mathbb{C}$  qui est  $z = -\frac{b}{2a}$ .
2. Si  $\Delta > 0$ , alors l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  possède deux solutions réelles qui sont  $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
3. Si  $\Delta < 0$ , alors l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  possède deux solutions complexes qui sont  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

*Démonstration.* Si  $\Delta \geq 0$ , notons  $\delta = \sqrt{\Delta}$ , et si  $\Delta < 0$ , notons  $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ , de sorte qu'on a toujours  $\delta^2 = \Delta$ .

On a alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[ z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left( z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left( z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right). \quad (\star) \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow a \left( z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left( z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = 0 \text{ ou } z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - \delta}{2a}. \end{aligned}$$

Si  $\Delta = 0$ , alors ces deux nombres sont confondus, et sinon, ils sont distincts. Dans les deux cas, les factorisations annoncées découlent directement de  $(\star)$ .  $\square$

### Exemple 0.35

Résolvons l'équation  $z^2 - 4z + 13 = 0$ .

Son discriminant est  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = -36 < 0$ .

Donc l'équation n'admet pas de solution réelle, mais possède deux solutions complexes conjuguées, qui sont

$$z_1 = \frac{4 + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2} = 2 + 3i \text{ et } z_2 = 2 - 3i.$$

Notons en particulier que l'équation  $z^2 + 1 = 0$ , dont le discriminant vaut  $\Delta = -1 < 0$  possède  $i$  et  $-i$  comme uniques racines.

Donc  $i$  et  $-i$  sont les seuls nombres complexes dont le carré vaut  $-1$ .

### Terminologie

$\Delta$  est appelé le **discriminant** de l'équation.

### Remarque

Ces solutions ont deux complexes conjugués, de partie imaginaire non nulle, et donc ne sont pas des réels. L'équation ne possède donc toujours pas de racine réelle.

### Méthode

Cette étape est la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2, qu'il est bon de savoir refaire. Rappelons que la méthode est simple : il s'agit de «trouver» le bon  $\lambda$  de sorte que les termes en  $z^2$  et en  $z$  soient ceux qui apparaissent en développant  $(z + \lambda)^2$ .

Identité remarquable.

### Astuce

Lorsque  $\Delta < 0$ , une fois que l'on a calculé une des racines, l'autre est le conjugué de la première.